ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО СВЯЗИ

Северо-Кавказский филиал

ордена Трудового Красного Знамени федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования

«Московский технический университет связи и информатики»

Методические указания

по выполнению контрольной работы

по дисциплине

Высшая математика

Направление подготовки – 11.03.02 «Инфокоммуникационные технологии и системы связи»

Ростов-на-Дону

2019

УДК 51

ББК 22

К 72

Методические указания по выполнению контрольной работы по дисциплине «Высшая математика». – Ростов-на-Дону: СКФ МТУСИ, 2019. – 142 с.

Составитель: Г.С. Костецкая, к.ф.-м..н., доцент

Рассмотрено и одобрено

на заседании кафедры Общенаучной подготовки

Протокол от «18» февраля 2019г. № 2

И з д а т е л ь с т в о   С К Ф   М Т У С И

Сдано в набор 11.03.19г. Изд. №297. Подписано в печать 11.03.19г. Зак. №311.
Печ. листов 8,88. Учетно-изд. л. 7,1. Печать оперативная. Тир. 5 экз.
Отпечатано в Полиграфическом центре СКФ МТУСИ, Серафимовича, 62.

ВВЕДЕНИЕ

Предлагаемые методические указания относятся ко второй части курса «Высшая математика», изучаемого студентами-заочниками СКФ МТУСИ во втором семестре. Эта часть посвящена интегральному исчислению функции одной переменной, интегральному исчислению функции многих переменных, а также дифференциальным уравнениям, операционному исчислению и рядам. По указанной части курса выполняется контрольная работа №1.

Методические указания не заменяют учебников, а содержат лишь разъяснения о порядке изучения программного материала, краткий обзор отдельных вопросов, а также решение некоторых типовых задач и вопросы для самоконтроля.

Основная литература, по которой следует изучать курс, приведена ниже.

ОБЩИЕ УКАЗАНИЯ

1. Самостоятельная работа студентов

Самостоятельная учебная работа студентов заочной формы обучения предполагает изучение материала дисциплины по литературным источникам (Табл. 1) в соответствии с распределением времени в таблице 2

Таблица 1

Рекомендуемая литература				
Основная литература				
Код	Авторы, составители	Заглавие	Издательство, год	Кол.
Л.1.1	Ровба Е.А.	Высшая математика. Учебное пособие.	Минск, изд. Высшая школа, 2012.	Э2
Л.1.2	Ровба Е.А.	Высшая математика. Задачник.	Минск, изд Высшая школа, 2012.	Э2
Л.1.3	Демидович Б.П	Задачи и упражнения по математическому анализу (для втузов)	М.: Астрель - АСТ, 2010.	70
Дополнительная литература				
	Авторы, составители	Заглавие	Издательство, год	Кол

Л.2.1	Кытманов А.М.	Математический анализ. Учебное пособие для бакалавров.	Издательство «Юнити». 2012	30
Л.2.2	Костецкая Г.С., Ефименко В.Н., Докучаев С.А., Прушинская Л.А.	Высшая математика. Учебное пособие.	Ростов-на-Дону, СКФ МТУСИ УМО, 173с.,	Э1.
Методические разработки				
	Авторы, составители	Заглавие	Издательство, год	Кол.
Л.3.4	Гаврилова Р.М., Костецкая Г.С.	Математический анализ. Определенный интеграл. Практикум.	Ростов-на-Дону. СКФ МТУСИ, 2012.	Э1.
Л.3.6	Гаврилова Р.М., Костецкая Г.С.	Практикум по интегральному исчислению функции одной переменной. Учебное пособие.	Ростов-на-Дону. СКФ МТУСИ, 2010.	Э1.

Электронные образовательные ресурсы	
Э1	http://www.skf-mtusi.ru/?page_id=659
Э2	www.iprbookshop.ru.

2. Решение задач

Приступая к решению задач, следует после изучения очередного раздела по учебнику внимательно изучить примеры решения типовых задач по данному пособию, а затем переходить к самостоятельному решению рекомендованных задач. В тех случаях, когда это возможно, следует дать чертеж, поясняющий содержание задачи. Решение должно сопровождаться краткими, но исчерпывающими пояснениями. Решение каждой задачи должно доводиться до окончательного ответа и по возможности проводиться в общем виде на буквах. Числовые данные подставляются в формулу в конце решения задачи. В промежуточных вычислениях не следует вводить приближенные значения корней, числа π и т.д.

3. Выбор варианта

Выбор варианта для выполнения контрольной работы определяется следующим образом:

- Если две последние цифры номера студенческого билета образуют число меньше 51, то это число и является номером варианта.
- Если две последние цифры номера студенческого билета образуют число больше или равное 51, то для получения номера варианта из этого числа нужно отнять 50 (например, если номер студенческого билета оканчивается на 68, то номер варианта будет 68-50=18)

4. Требования к оформлению контрольных работ

Контрольные работы могут предъявляться на бумажном носителе в ЦОКР или выкладываться в электронном формате в личном кабинете студента (по указанию преподавателя).

<u>А. Требования к оформлению контрольной работы на бумажном носителе с предоставлением работы в ЦОКР</u>

1. Работа должна быть оформлена в одном из текстовых процессоров (форматы: .doc, .docx, .odt), распечатана и представлена в Центр обработки контрольных работ.
2. Работа должна иметь титульный лист, выполненный в соответствии с установленными правилами (http://www.skf-mtusi.ru/?page_id=663).
3. Страницы работы должны быть пронумерованы.
4. Работа должна быть подписана. В работу должен быть вставлен чистый лист для рецензии.

5. Решения задач в контрольных работах сопровождаются исчерпывающими, но краткими объяснениями. Задачи располагают в порядке номеров, указанных в заданиях, перед решением задачи выписывается полностью ее условие.

6. Работа, выполненная по другому варианту, с пропуском какого–либо задания или содержащая серьезные ошибки и недостатки не допускается к защите. Повторная работа рецензируется в том случае, когда к ней приложена ранее не допущенная работа вместе с рецензией.

<u>Б. Требования к оформлению контрольной работы в электронном формате для размещения в личном кабинете студента</u>

1. Работа должна быть оформлена в одном из текстовых процессоров (форматы: .doc, .docx, .odt), после чего должна быть переведена в формат PDF для размещения в личном кабинете студента.
2. Работа должна иметь титульный лист, выполненный в соответствии с установленными правилами (http://www.skf-mtusi.ru/?page_id=663).
3. Страницы работы должны быть пронумерованы.
4. Решения задач в контрольных работах сопровождаются исчерпывающими, но краткими объяснениями. Задачи располагают в порядке номеров, указанных в заданиях, перед решением задачи выписывается полностью ее условие.
5. Работа, выполненная по другому варианту, с пропуском какого–либо задания или содержащая серьезные ошибки и недостатки не допускается к защите. Повторная работа рецензируется в том случае, когда к ней приложена ранее не допущенная работа вместе с рецензией.

5. Порядок представления и защиты контрольной работы

Контрольная работа сдается на проверку в сроки, установленные планами-графиками. В результате рецензирования работы преподавателем студент получает одну из двух оценок: «допущен к собеседованию», «не допущен к собеседованию». В последнем случае необходимо после исправления отмеченных преподавателем недостатков представить работу для повторного рецензирования. Работы с оценкой «допущен к собеседованию» должны быть защищены на экзамене.

6. Очная учеба студентов.

Студенты, успешно выполняющие учебный план, приглашаются в университет для проведения лабораторных работ, сдачи экзаменов и очной работы с преподавателями. В это время для студентов читаются обзорные лекции и проводятся упражнения в объеме учебного плана.

Следует иметь в виду, что обзорные лекции не являются систематическим чтением курса. Они охватывают лишь узловые моменты программы. Обзорные лекции, упражнения и консультации будут полезны студентам, которые проработали курс по полной программе и выполнили контрольные задания.

7. Сдача экзамена.

К сдаче экзамена допускаются студенты, имеющие на руках выполненную и зачтенную контрольную работу. Экзамены сдаются устно. При сдаче экзаменов студент должен знать все определения, формулы, теоремы и их доказательства, а также уметь решать задачи по данному курсу.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО РАЗДЕЛАМ КУРСА

РАЗДЕЛ I. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

Вопросы, подлежащие изучению

1. Комплексные числа, их изображение на плоскости.

2. Алгебраические действия над комплексными числами. Модуль и аргумент комплексного числа.

3. Сопряженные комплексные числа, формулы Эйлера.

1. Рассмотрим различные формы записи комплексных чисел. Запись комплексного числа z в виде $z = x + iy$ (1) называется алгебраической формой комплексного числа, при этом x и y – действительные числа, i – мнимая единица, определяемая условием $i^2 = -1$. Сопряженное комплексное число есть $z = x - iy$.

Комплексное число изображается как точка M на координатной плоскости x0y

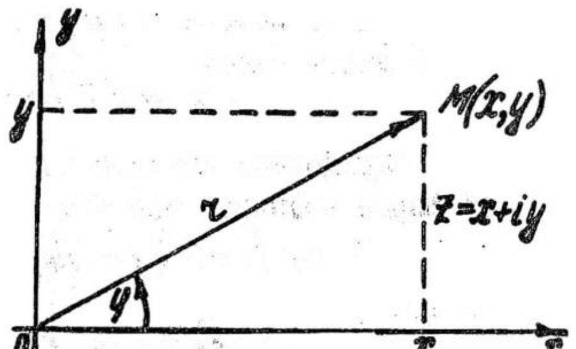


Рис. I

с координатами (x,y), либо как вектор, ищущий из начала координат, с проекциями {x,y} при этом (1) рассматривается как разложение вектора Z по осям координат (рис.1.). Проекция x и y называются действительной и мнимой частью комплексного числа Z и обозначаются $x = \mathrm{Re}\, z; y = \mathrm{Im}\, z.$ Таким образом, $z = \mathrm{Re}\, z + i\mathrm{Im}\, z.$

Наряду с представлением комплексного числа в форме (1) удобно пользоваться его представлением в полярных координатах. Если r и φ - полярные координаты точки $z = x + iy$, то $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. (2)

Выражние (2) называется тригонометрической формой комплексного числа, при этом величина к назывется модулем комплексного числа z и равна $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, (3), а величина φ называется аргуметом комплексного числа и обозначается $\varphi = \mathrm{Arg}\, z = \arg z + 2k\pi\ (k = 0, \pm 1, \dots)$, при этом $\arg z = \varphi_0$ – главное значение аргумента такое, что $-\pi < \varphi_0 \leq \pi$ $\mathrm{tg}\,\varphi_0 = \frac{y}{x}$.

При нахождении угла φ_0 из последнего соотношение надо учитывать четверть, в которой находится угол φ_0.

Пример 1. Записать комплексное число z=-1+i в триганометрической форме.

Решение. Для заданного числа z=-1+i имеем $x=-1, y=1$.

Тогда $r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(-1)^2+1^2}=\sqrt{2}$; $\operatorname{tg}\varphi_0=\frac{1}{-1}=-1$.

Отсюда $\varphi_{01}=\frac{3}{4}\pi$ или $\varphi_{02}=-\frac{\pi}{4}$.

Очевидно, что угол φ_0 лежит во второй четверти, так как точка z находится во второй четверти. Поэтому $\varphi_0=\frac{3}{4}\pi$.

В итоге имеем $z=\sqrt{2}(\cos\frac{3}{4}\pi+i\sin\frac{3}{4}\pi)$.

Сопряженное комплексное число $\bar{z}=x-iy$ в триганометрической форме записывается так: $\bar{z}=r[\cos(-\varphi)+i\sin(-\varphi)]=r(\cos\varphi-i\sin\varphi)$, при этом $r=|\bar{z}|=|z|$, $\operatorname{Arg}\bar{z}=-\operatorname{Arg}z$.

При z=0 модуль |z|=0, а величина $\operatorname{Arg}z$ не определена.

Применяя формулу Эйлера $e^{i\varphi}=\cos\varphi+i\sin\varphi$, комплексное число можно записать в показательной форме: $z=re^{i\varphi}$. (4)

Необходимо уметь переходить от показательной формы комплексного числа к тригонометрической и алгебраической формам и обратно. При рассмотрении разности двух комплексных чисел $z-z_0$ необходимо иметь в виду, что модуль этой разности $|z-z_0|=\rho$ имеет геометрический смысл окружности с центром в точке z_0 и радиусом ρ, так как по определению $|z-z_0|=|x+iy-(x_0-iy_0)|=|(x-x_0)+(y-y_0)|=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$.

Но $\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}=\rho$ или $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=\rho^2$.

Полученное алгебраическое выражение есть уравнение окружности радиуса ρ в плоскости x0y с центром в точке (x_0, y_0). Неравенство $|z-z_0|\leq\rho$ описывает тогда множество точек, лежащих внутри указанной окружности и на самой окружности, а неравенство $|z-z_0|>\rho$ есть множество точек, лежащих вне указанной окружности.

Пример 2. На комплексной плоскости начертить область, удовлетворяющую условиям $1\leq|z+2-i|<3$; $|\arg(z+2-i)|\leq\frac{\pi}{4}$; $\operatorname{Re}z<\frac{1}{2}$; $\operatorname{Im}z\leq 2$.

Решение. Неравенство $1\leq|z+2-i|<3$ выделяет на плоскости кольцо с центром в точке$z_0=-2+i$ с внутренним радиусом 1 и внешним радиусом 3, причем внутренняя окружность принадлежит заданной области, а внешняя - не принадлежит (рис. 2а).

Второе условие выделяет сектор с центром в точке $z_0=-2+i$ с лучами $\arg(z+2-i)=-\frac{\pi}{4}$ и $\arg(z+2-i)=\frac{\pi}{4}$, причём оба луча принадлежат области (рис.2б).

Третье условие выделяет из сектора кольца A,B,C,D ту его часть, для точек которой справедливо неравенство $x<0.5$,причем граница $\operatorname{Re} z = 0.5$ области не принадлежит (рис. 2в).

Четвертое условие выделяет из сектора кольца A,B,C,D ту его часть, для точек которой справедливо неравенство $y \leq 2$, причём граница $\operatorname{Im} z = 2$ принадлежит области (рис.2г).

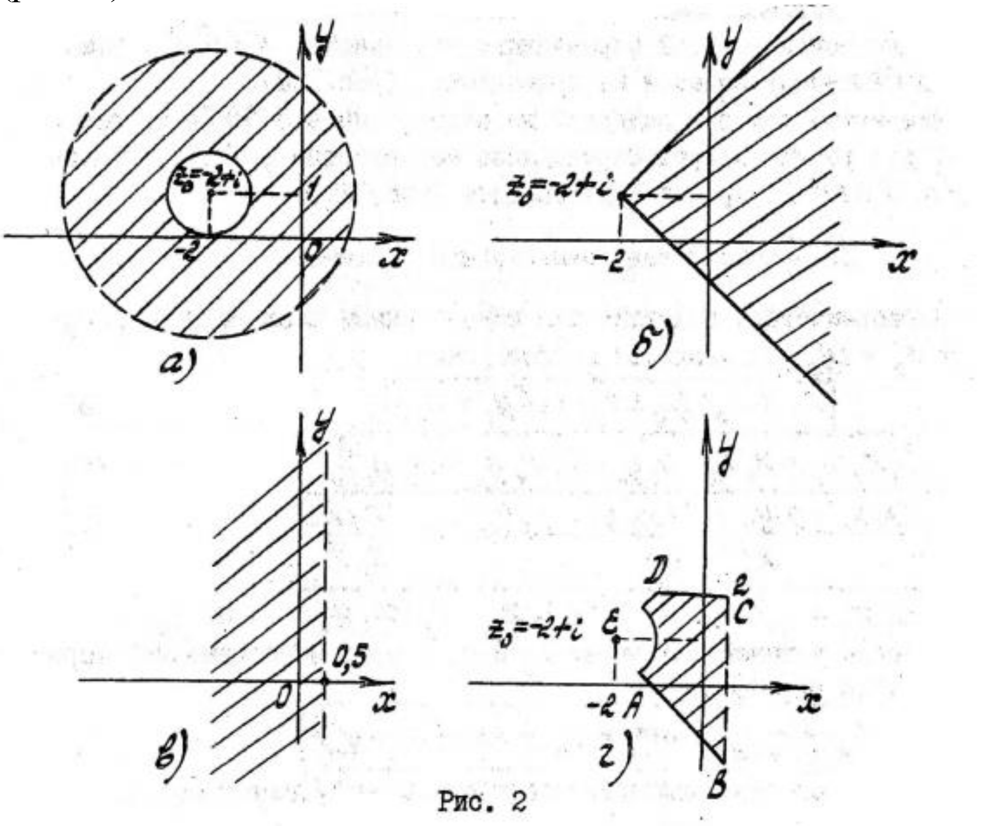


Рис. 2

1. Действия на комплексными числами

Алгебраические дествия над комплексными числами $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ выполняются по формулам:

$$z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2); \qquad (5)$$

$$z_1 z_2 = x_1 x_2 - y_1 y_2 + i(x_1 y_2 + x_2 y_1); \quad (6)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 x_2 - y_1 y_2 + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)}{x_2^2 + i y_2^2}; \qquad (7)$$

Если $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$, $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$, то умножение комплексных чисел z_1и z_2 в тригонометрической форме определяется равенством $z_1 z_2 = r_1 r_2[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)]$ (8)

Возведение в степень комплексного числа $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ определяется равенством $z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$, (9)

При этом $|z^n| = |z|^n = r^n$; $\operatorname{Arg} z^n = n\operatorname{Arg} z$. (10)

Операция извлечения корня n-ой степени из комплексного числа $z = r\,(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ определяет n различных комплексных значений $z_k = \sqrt[n]{z}$ по формуле $z_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right), k = 0,1,\dots,n-1$ (11)

Точки $z_0, z_1, \dots, z_{n-1}$ расположены в вершинах правильного многоугольника, вписанного в окружность с центром в начале координат и радиусом $\rho = \sqrt[n]{r}$.

Пример 3. а) решить уравнение $8z^3 + 27 = 0$. Значение корней хаписать в триганометрической, алгебраической и показательной формах. Изобразить решение на комплексной плоскости.

б) вычислить сумме двух первых корней $(z_0 + z_1)$. Результат записать в показательной форме.

Решение. а) перепишем уравнение следующим образом $z^3 = -\frac{27}{8}$.

Число $-\frac{27}{8}$ запишем в триганометрической форме $-\frac{27}{8} = \frac{27}{8}(\cos\pi + i\sin\pi)$, так как $\left|-\frac{27}{8}\right| = \frac{27}{8}, \arg\left(-\frac{27}{8}\right) = \pi$.

Тогда по формуле (9), пологая $k = 0,1,2.\ n = 3$, получим

$z_k = \sqrt[3]{\frac{27}{8}}(\cos\frac{\pi+2\pi k}{3} + i\sin\frac{\pi+2\pi k}{3})$, откуда 1) $k = 0{:}\ z_0 = \frac{3}{2}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3}{2}e^{\frac{\pi}{3}i} = \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{3}{4} + i\frac{3\sqrt{3}}{4}$;

2) $k = 1{:}\ z_1 = \frac{3}{2}\left(\cos\frac{\pi+2\pi}{3} + i\sin\frac{\pi+2\pi}{3}\right) = \frac{3}{2}(\cos\pi + i\sin\pi) = \frac{3}{2}e^{\pi i} = -\frac{3}{2}$;

3) $k = 2{:}\ z_1 = \frac{3}{2}\left(\cos\frac{\pi+4\pi}{3} + i\sin\frac{\pi+4\pi}{3}\right) = \frac{3}{2}\left(\cos-\frac{\pi}{3} + i\sin-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3}{2}e^{-\frac{\pi}{3}i} = \frac{3}{4} - i\frac{3\sqrt{3}}{4}$.

Все три корня z_0, z_1, z_2 расположены на окружности радиуса 3/2 и являются вершинами правильного треугольника (рис.3).

б) Вычислим сумму $(z_0 + z_1)$. Сложение выполняем в алгебраической форме: $(z_0 + z_1) = \frac{3}{4} - i\frac{3\sqrt{3}}{4} + \left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{3}{4} + i\frac{3\sqrt{3}}{4}$.

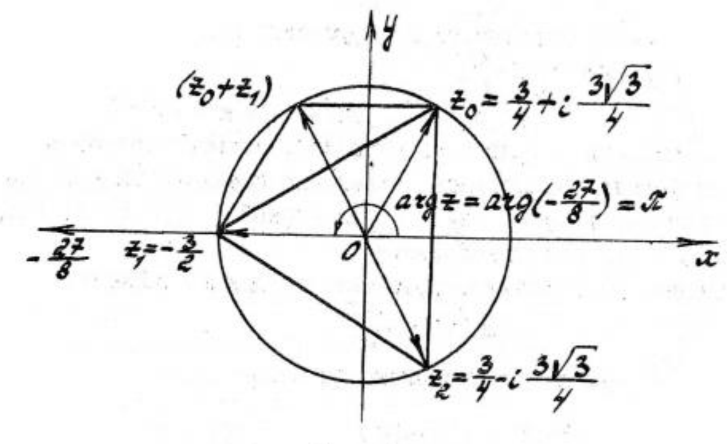


Рис. 3

Чтобы записать результат в показательной форме, найдём модуль $|z_0 + z_1|$ и аргумент φ_0 полученной суммы:

$$|z_0 + z_1| = \sqrt{(-\frac{3}{4})^2 + (\frac{3\sqrt{3}}{4})^2} = \sqrt{\frac{9}{16} + 27/16} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2};\ \operatorname{tg}\varphi_0 = \frac{\frac{3\sqrt{3}}{4}}{-\frac{3}{4}} = -\sqrt{3}\ .$$

Отсюда имеем $\varphi_{01} = -\frac{\pi}{3}$; $\varphi_{02} = \frac{2}{3}\pi$

Из чертежа видно, что точка $(z_0 + z_1)$ лежит во второй четверти. Поэтому $\varphi_0 = \frac{2}{3}\pi$. В результате имеем $(z_0 + z_1) = \frac{3}{2}e^{\frac{2\pi}{3}i}$.

Вопросы для самомпроверки.

1. Как геометрически представляют комплексные числа?
2. Что называется, действительной и мнимой частью комплексного числа?
3. Что называется модулем и аргументом комплексного числа?
4. Какова связь между алгебраической, показательной и тригонометрической формами комплексного числа?
5. Как умножаются и делятся комплексные числа в тригонометрической форме?
6. Как определяется n-я степень комплексного числа?
7. Напишите формулу для извлечения корня n -й степени из комплексного числа.
8. Напишите формулу Эйлера.

Раздел 2. Неопределённый интеграл.

Литература

[1. (гл.3 ст.145-171)]

[2. (ст.96-115)]

[3. (Демидович №1031-1500(выборочно))]

Вопросы, подлежащие изучению

1. Неопределенный интеграл, первообразная, ее простейшие свойства. Таблица основных интегралов.
2. Непосредственное интегрирование функций, интегрирование по частям и подстановкой.
3. Интегрирование рациональных дробей, некоторых иррациональных функций.
4. Интегрирование рациональных дробей и иррациональных функций, содержащих квадратный трехчлен.
5. Интегрирование тригонометрических функций.
6. Интегрирование иррациональных функций с помощью тригонометрических подстановок.
7. Интегрирование гиперболических функций.

В предыдущем семестре мы в основном занимались следующей задачей: по данной функции F(x) надо было найти ее производную f(x) = F`(x) . Изучив основные приемы дифференцирования, мы встретились с некоторыми важными приложениями понятия производной (нахождение экстремумов функций, уравнений касательных, скоростей и т.д.), узнали, что не все функции дифференцируемы (например, функция y = |x| в точке x = 0), что из дифференцируемости следует непрерывность.

Теперь мы переходим к следующему гораздо более сложное и не менее важному разделу высшей математики. - интегральному исчислению. Основная задача интегрирования прямо противоположна соответствующей задаче дифференциального исчисления: по данной производной f(x) некоторой неизвестной функции F (x) на данном интервале (a,в) найти саму эту функцию F(x) на этом интервале (мы, как правило, будем считать, что (a,в) = $(-\infty, \infty)$).

2.1. Первообразная. Свойства неопределенного интеграла.

В этом случае функция F(x) называется <u>первообразной</u> от функции f(x). Совокупность всех первообразных функции -f(x)(их вообще говоря бесконечно много) называется неопределенным интегралом от функции f(x) и обозначается $\int f(x)dx$.

Нетрудно показать, однако, что любые две первообразные $F_1(x)$ и $F_2(x)$ данной функции f(x) отличаются лишь на константу ,. т.е. $F_1(x) = F_2(x) + C$. Верно и обратное: если $F_1(x)$ - первообразная функции $f(x)$, то и $F_1(x) + C$ - первообразная той же функции для любого числа C.

Таким образом, для нахождения неопределенного интеграла от данной функции f(x) достаточно найти лишь одну (любую!) первообразную F(x) от нее, а все остальные получаются сдвигом на константу, т.е.

$$F'(x) = f(x) => \int f(x)dx = F(x) + C, \text{где } C - \text{любое.}$$

Заметим сразу, что так как не всякая функция f(x) является производной некоторой функции, то и $\int f(x)dx$ определен не для всякой функции. Однако если $f(x)$ - непрерывна, то интеграл существует. Таким образом,

$$f(x) - \text{непрерывна} => \int f(x)dx \text{ определён.}$$

Этого свойства нам будет вполне достаточно в дальнейшем, так как мы будем находить только интегралы от непрерывных функций.

Перейдем теперь непосредственно к технике интегрирования, необходимой для выполнения контрольных работ и для дальнейшего изучения математики. Попутно мы будем кратко (все свойства без доказательств!) останавливаться на некоторых теоретических моментах и акцентировать внимание на важнейших практических приемах интегрирования. Для более полного ознакомления с предметом необходимо, разумеется, ознакомление с соответствующими разделами из литературы, указанной в начале этой теш (возможно использование и других источников).

Для того, чтобы научиться более или менее свободному владению техникой интегрирования, необходимо, в первую очередь выучить наизусть (!) таблицу простейших интегралов, которая приводится в любом пособии по высшей математике и является как бы "таблицей простейших производных - наоборот" (так как производная от правой части должна дать подынтегральное выражение в левой части). Поэтому запомнить их не очень сложно, хотя среди них встречаются четыре интеграла, которые запоминаются, как правило, не сразу. В силу этого мы приведём их отдельно (во второй рамке мы используем неравенство |a-x|=|x-a|):

$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\text{arctg}\frac{x}{a} + C$, $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$, $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a-x}{a+x}\right| + C$, $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$.

Отметим теперь некоторые простейшие свойства неопределенного интеграла:

1. Неопределенный интеграл от дифференциала функции F(x) равен F(x) + C , где C пробегает все действительные числа, т.е.
$$\int dF(x) = F(x) + C$$
2. Интеграл от суммы (соответственно разности) двух функций равен сумме (соответственно разности) их интегралов, т.е. $\int [f_1(x) \pm f_2(x)]dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx$.

3. Постоянный множитель можно вносить за знак интеграла, т.е. $\int af(x)dx = a\int f(x)dx$.
4. $\int f(x)dx = F(x) + C => \int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C$.

Пример 1. $\int \frac{dx}{x^2+2x+2} = \int \frac{dx}{(x+1)^2+1}$, осталось воспользоваться свойством 4 и табличным интегралом $\int \frac{dx}{x^2+2x+2} = \operatorname{arctg}(x+1) + C$.

Пример 2. $\int \sin^2 x\, dx = \int \frac{1-\cos 2x}{2} dx = \int \frac{1}{2} dx - \int \frac{\cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2}\int \cos 2x\, dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\frac{\sin 2x}{2} + C = \frac{1}{2} - \frac{\sin 2x}{4} + C$.

В предпоследнем равенстве мы воспользовались табличными интегралами $\int dx$ и $\int \cos x dx$, а также свойством 4.

Перед тем как перейти к изучению двух важнейших методов интегрирования - методу подстановки и методу интегрирования по частям - обязательно нужно вспомнить понятие дифференциала функции, умение применять которое необходимо в обоих методах.

Дифференциал функции φ(x) (обозначается dφ(x))есть произведение ее производной на дифференциал переменной x, или что то же на приращение переменной x (обозначается Δx , а чаще -dx), т.е. $d\varphi(x) = \varphi'(x)dx$.

Весьма полезно знать некоторые наиболее чаото встречающиеся в интегрировании выражения, являющиеся дифференциалами:

$$\sin x\, dx = -d\cos x, \quad \cos x\, dx = d\sin x,$$
$$\frac{dx}{x} = d\ln x, \quad \frac{dx}{\sin^2 x} = -d\,\operatorname{ctg} x,$$
$$\frac{dx}{\cos^2 x} = d\,\operatorname{tg} x, \quad e^x dx = de^x,$$
$$x\,dx = \frac{1}{2}dx^2, \quad \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2d\sqrt{x}.$$

и др.

1.2. Метод подстановки

Пожалуй, самым часто иопользуемым приемом при интегрировании является метод подстановки (или замены переменной) в неопределенном интеграле:

$\int f(\varphi(x)) * \varphi'(x)dx = \int f(t)dt$, где $t = \varphi(x)$.

Этот метод позволяет сводить довольно сложные интегралы (содержащие, как правило, в подынтегральном выражении дифференциал какой-нибудь функции, которую и выбирают за новую переменную, в явном виде) к табличным или уже известным.

Очень важно еще отметить следующее: так как возможны различные методы вычисления одного и того же интеграла, то в итоге могут получиться совершенно непохожие на вид ответы; поэтому лучшей проверкой ответа является его дифференцирование - результат должен совпасть с подынтегральной функцией.

Пример 3.
$\int \frac{dx}{\sin^2 x(1-\operatorname{ctg} x)} = \int \frac{d(1-\operatorname{ctg}x)}{1-\operatorname{ctg}x} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|1-\operatorname{ctg}x| + C$. Замена $t = 1 - \operatorname{ctg} x$

Если вы использовали метод подстановки, не забывайте в ответе вернуться к старой переменной!

Пример 4. $\int (2x-3)^{21} * x dx$.

Разумеется, в этом примере былобы неразумно и заняло бы слишком много времени возводить (2x -3) в 21 степень (хотя такие случаи и встречались). Всегда надо стремиться делать замену, которая упрощает подынтегральное выражение. Здесь очевидна подстановка $t = 2x - 3$. Тогда $x = \frac{t+3}{2}, dx = \frac{dt}{2}$, откуда окончательно: $\int (2x-3)^{21} x dx = \int t^{21} \frac{(t+3)}{2} * \frac{dt}{2} = \frac{1}{4}\int (t^{22} + 3t^{21})dt = \frac{1}{4}\int t^{22}\,dt + \frac{3}{4}\int t^{21}dt = \frac{1}{4*23}t^{23} + \frac{3}{4*22}t^{22} + C = \left(\frac{t}{92} + \frac{3}{88}\right)t^{22} + C = (\frac{2x-3}{92} + \frac{3}{88})(2x-3)^{22} + C.$

Пример 5. $\int \frac{\sin\frac{1}{x}}{x^2}dx = \int \sin\frac{1}{x}\, d\left(-\frac{1}{x}\right) = -\int \sin\frac{1}{x}\, d\frac{1}{x} = -\int \sin t\, dt = \cos t + C = \cos\frac{1}{x} + C$

Пример 6. Пусть многочлен $x^2 + px + q$ не емеет действительных корней. Тогда $\int \frac{dx}{x^2+px+q} = \int \frac{dx}{(x+\frac{p}{2})^2 - \frac{p^2}{4} + q} = \int \frac{d\left(x+\frac{p}{2}\right)}{(x+\frac{p}{2})^2 + (q-\frac{p}{4})^2} = \int \frac{dt}{t^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{t}{a} + C = \frac{1}{\sqrt{q^2-\frac{p^2}{4}}}\operatorname{arctg}\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q^2-\frac{p^2}{4}}} + C$

1.3. Метод интегрирования по частям

Вторым важнейшим приемом интегрирования является метод интегрирования по частям (u(x) и v(x) - дифференцируемые функции):

$$\int u dv = uv - \int v du$$

Это правило применяется обычно, когда подынтегральное выражение можно представить в виде и udv , причем выражение du существенно проще, чем u , а выражение v несущественно сложнее dv. В результате $\int vdu$ получается проще исходного интеграла $\int udv$. С помощью этого метода считаются многие интегралы, например, интегралй от обратных тригонометрических функций ($\arcsin x, \arccos x, \ldots$), интегралы вида

$$\int x^n \sin x\, dx, \quad \int x^n e^x\, dx,$$
$$\int e^x \sin x\, dx, \quad \int x^n \ln x\, dx \quad \text{и др.}$$

В некоторых случаях (как при вычислении интеграла $\int e^x \sin x\, dx$) это правило интегрирования по частям применяется дважды; часто в промежуточных вычислениях используется еде и метод подстановки. Таким образом, мы убеждаемся в том, что интегрирование является гораздо более сложным математическим искусством, требующим определенных навыков, а порой и изобретательности.

Пример 7. $\int \ln x dx$.

Положим $u = \ln x$, $dx = dv$, jnrelf $du = d\ln x = \frac{dx}{x}$. В качестве v возьмём простейшёю первообразную в семействе $\int dx = x + C$, т.е. $v = x$ (мы воспользовались тем, что $dx = dv => \int dx = \int dv$).

Тогда по правилу интегрирования по частям

$$\int \overbrace{\ln x}^{u}\overbrace{dx}^{dv} = \left(\overbrace{\ln x}^{u}\right) * \overbrace{x}^{v} - \int \overbrace{x}^{v}\frac{\overbrace{dx}^{du}}{x} = x\ln x - x + C = x(\ln x - 1) + C.$$

Этот интеграл весьма часто используется в контрольных заданиях.

Пример 8. $\int \operatorname{Arccos} x\, dx = \left[\begin{matrix} u = \arccos x \\ dv = dx \end{matrix} || => \begin{matrix} du = -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ v = x \end{matrix}\right] = \arccos x * x - \int \overbrace{x}^{v}\left(-\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\right) = x\arccos x + \int -\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}\left[\begin{matrix} t = 1 - x^2 \\ dt = -2xdx => xdx = -\frac{dt}{2} \end{matrix}\right] = x\arccos x - \frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{t}} = x\arccos x - \frac{1}{2}2\sqrt{t} + C = x\arccos x - \sqrt{1-x^2} + C$

Пример 9. $\int x^2e^xdx = x^2e^x - 2\int xe^xdx$.

$\begin{matrix} u=x^2 \\ dv=e^xdx \end{matrix}\Bigg\| => \begin{matrix} du = 2xdx \\ v = e^x \end{matrix}$, $\int xe^xdx$ снова интегрируем по частям:$\Big|\begin{matrix} u_1 = x \\ dv_1 = e^xdx \end{matrix} => \begin{matrix} du_1 = dx \\ v_1 = e^x \end{matrix}$, откуда $\int xe^xdx = xe^x - \int e^xdx = xe^x - e^x + C$.

Окончательно: $\int x^2e^xdx = x^2e^x - 2xe^x + 2e^x + C$.

1.4. Интегрирование рациональных функций.

Большую роль в теории интегрирования играет понятие рациональной функции.

Рациональная функция одной переменной может быть представ» лена в виде:

$R(x) = \frac{Q(x)}{P(x)}$, где Q и P - многочлены. Если степень многочлена Q меньше степени многочлена P , такая рациональная функция (рациональная дробь) называется правильной. Если степень многочлена Q больше или равна степени многочлена P , дробь называется неправильной.

Например, рациональными являются функции:

$R_1(x) = \frac{3x-1}{x-1}$; $R_2(t) = \frac{t^5-4t^4+t^2-16}{12t^7-4t+1}$; $R_3(u) = \frac{u^7}{7u^6+1}$.

причем R_2 , является правильной рациональной дробью, а R_1 и R_3 неправильными рациональными дробями.

Рациональная функция нескольких аргументов $R(x_1, x_2, \dots, x_n)$ может быть представленна в виде $R(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{Q(x_1,x_2,\dots,x_n)}{P(x_1,x_2,\dots,x_n)}$, где Q и P – многочлены с переменными $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Например, рациональными функциями двух переменных являются:

$R_4(x,y)=\frac{(1-y)^2}{x^2y}$,$R_5(u,v)=\frac{2u^2-3uv+v-2}{u^4+2u^2v+u+3}$, $R_6(\omega,t)=\frac{(2\omega+t)^2+7}{t+1}$.

Функция R может быть пациональной с переменными $x_1=f_1(x), x_2=f_2(x),\dots,x_n=f_n(x)$.

Например, если $y=\sqrt{1+x+2x^2}, u=\sin x, v=\cos x, \omega=\sqrt{x}, t=\sqrt[4]{x^3}$, то рациональными будут следующие функции(в скобках указаны соответсвующие переменные):

$R_4\left(x,\sqrt{1+x+2x^2}\right)=\frac{(1-\sqrt{1+x+2x^2})^2}{x^2\sqrt{1+x+2x^2}}$,

$R_5(\sin x,\cos x)=\frac{2\sin^2 x-3\sin x\cos x+\cos x-2}{\sin^4 x+2\sin^2 x\cos x+\sin x+3}$, $R_6\left(\sqrt{x},\sqrt[4]{x^3}\right)=\frac{(2\sqrt{x}+\sqrt[4]{x^3})^2+7}{\sqrt[4]{x^3}+1}$.

В то же время функции R_5 и R_6 не являются рациональными функциями аргумента x; функция R_5 не является рациональной функцией ни от X , ни от sinx, ни от cosx в отдельности.

Для нахождения интегралов вида $\int R(x)dx$ применяют разложение подынтегральной функции на простейшие дроби. При этом если дробь R(x) неправильная, то предварительно выделяют в R(x) целую часть делением одного многочлена на другой.

Пример 10. Найти $I=\int\frac{2x^2+41x-91}{(x-1)(x+3)(x-4)}dx$.

Под знаком интеграла стоит дробно-рациональная функция $R(x)=\frac{2x^2+41x-91}{(x-1)(x+3)(x-4)}$.

Так как эта дробь правильная, то ее можно представить в виде суммы простейших дробей следующим образом: $R(x)=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+3}+\frac{C}{x-4}$.

После приведения к общему знаменателю получим следующее представление:
$\frac{2x^2+41x-91}{(x-1)(x+3)(x-4)}=\frac{A(x+3)(x-4)+B(x-1)(x-4)+C(x-1)(x+3)}{(x-1)(x+3)(x-4)}$,

где A, B, C - некоторые постоянные, которые надо определить. Последнее равенство верно при всех значениях x . Ввиду равенства знаменателей следует равенство числителей: $2x^2+41x-91\equiv A(x+3)(x-4)+B(x-1)(x-4)+C(x-1)(x+3)$ или $2x^2+41x-91=(A+B+C)x^2+(-A-5B+2C)x-12A+4B-3C$.

Тождественное равенство многочленов означает, что коэффициенты при одинаковых степенях x у этих многочленов совпадают, т.е.

- коэффициенты при x^2: $2=A+B+C$,
- коэффициенты при x^1: $41=-A-5B+2C$,
- коэффициенты при x^2: $-91=-12A+4B-3C$.

Из этой системы уравнений находим: A = -4, B = -7, C =5.

Те же значения постоянных A, B, C можно получить и из следующих соображений. Тождественное равенство двух функций означает, что они совпадают при любых значениях x . Подставляя в тождество многочленов x-1, получим - 48 = -12A т.е. A = 4; подставляя x = -3, получим -196 = 28B, т.е. B = -7; подставляя x = 4, получим 105 = 21C, т.е. C = 5.

Таким образом, получено разложение подынтегральной функции на простейшие дроби: $\mathrm{R(x)} = \frac{4}{x-1} - \frac{7}{x+3} + \frac{5}{x-4}$.

Тогда $\mathrm{I} = \int \frac{2x^2+41x-91}{(x-1)(x+3)(x-4)} dx = \int \frac{4dx}{x-1} - \int \frac{7dx}{x+3} + \int \frac{5dx}{x-4} = 4\ln|x-1| - 7\ln|x+3| + 5\ln|x-4| + C = \ln\left|\frac{(x-1)^4(x-4)^5}{(x+3)^7}\right| + C.$

Пример 11. Найти $\mathrm{I} = \int \frac{5x^2+6x+9}{(x-3)^2(x+1)^2} dx$.

Подынтегральная функция представляет собой правильную рациональную дробь. Разложим ее на простейшие дроби $\mathrm{R(x)} = \frac{5x^2+6x+9}{(x-3)^2(x+1)^2} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{(x-3)^2} + \frac{C}{x+1} + \frac{D}{(x+1)^2}$, или $\frac{5x^2+6x+9}{(x-3)^2(x+1)^2} = \frac{A(x-3)(x+1)^2+B(x+1)^2+C(x-3)^2(x+1)+D(x-3)^2}{(x-3)^2(x+1)^2}$.

Из равенства дробей, равенства их знаменателей следует, что равны их числители: $5x^2 + 6x + 9 = A(x-3)(x+1)^2 + B(x+1)^2 + C(x-3)^2(x+1) + D(x-3)^2$ или $5x^2 + 6x + 9 = (A + C)x^3 + (-A + B - 5C + D)x^2 + (-5A + 2B + 3C - 6D)x - 3A + B + 9C + 9D$.

Эти многочлены тождественно совпадают, следовательно, равны коэффициенты при одинаковых степенях x , т.е.

- при x^3: $0 = A + C$,
- при x^2: $5 = -A + B - 5C + D$,
- при x^1: $6 = -5A + 2B + 3C - 6D$,
- при x^0: $9 = -3A + B + 9C + 9D$.

Решая систему этих уравнений, находим A=0, $B = \frac{9}{2}, C = 0, D = \frac{1}{2}$. Таким образом, $R(x) = \frac{9}{2} * \frac{1}{(x-3)^2} + \frac{1}{2} * \frac{1}{(x+1)^2}$

$\mathrm{I} = \int \frac{5x^2+6x+9}{(x-3)^2(x+1)^2} dx = \frac{9}{2}\int \frac{1}{(x-3)^2} + \frac{1}{2}\int \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{9}{2}\int (x-3)^{-2}\, d(x-3) + \frac{1}{2}\int (x+1)^{-2} = \frac{9}{2}\frac{(x-3)^{-1}}{-1} + \frac{1}{2}\frac{(x+1)^{-1}}{-1} + C = -\frac{9}{2(x-3)} - \frac{1}{2(x+1)} + C.$

Пример 12. Найти $I = \int \frac{x^3+1}{x(x^2+1)} dx$.

Степень многочлена, стоящего в числителе подынтегральной дроби, равна степени многочлена, стоящего в ее знаменателе, т.е. дробь неправильная, поэтому перед разложением дроби на простейшие надо выделить в ней целую часть. В общем случае это делают делением многочленов, но в данном случае проще выделить в числителе многочлен, стоящий в знаменателе, прибавив и отняв в числителе X, т.е.

$\frac{x^3+1}{x(x^2+1)} = \frac{x^3+1}{x^3+x} = \frac{x^3+x-x+1}{x^3+x} = 1 + \frac{1-x}{x^3+x}$.

Разложим на простейшие дробь $\frac{1-x}{x(x^2+1)}$:

$\frac{1-x}{x(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$ *или* $\frac{1-x}{x(x^2+1)} = \frac{A(x^2+1)+x(Bx+C)}{x(x^2+1)}$

Из простейшего равенства получаем тожество $1 - x \equiv A(x^2+1) + x(Bx + C)$ или $1 - x = x^2(A + B) + Cx + A$.

Приравняем коэффициенты при равных степенях x:

- коэффициенты при x^2: $0 = A + B$,
- коэффициенты при x^1: $-1 = C$,
- коэффициенты при x^2: $1 = -A$.

Откуда имеем: $A = 1, B = -1, C = -1$. Тогда $I = \int \frac{x^3+1}{x(x^2+1)} dx = \int (1 + \frac{1}{x} + \frac{-x-1}{x^2+1}) dx = \int dx + \int \frac{1}{x} dx - \int \frac{xdx}{x^2+1} - \int \frac{dx}{x^2+1} = x + \ln|x| - \frac{1}{2}\ln|x^2 + 1| + arctg\, x + C = x + \ln\left|\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right| - arctg\, x + C.$

При нахождении I мы воспользовались тем, что $xdx = \frac{1}{2} d(x^2 + 1)$

$\int \frac{xdx}{x^2+1} = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+1)}{x^2+1} = \frac{1}{2}\ln(x^2 + 1) + C.$

1.5. Интегрирование некоторых классов тригонометрических функций

Основным методом нахождения интегралов от тригонометрических функций является метод подстановки. В некоторых случаях метод подстановки применяется после предварительного преобразования подынтегральной функции с помощью известных из тригонометрии формул.

1. Интегралы вида $\int R(\sin x, \cos x) dx$с помощью универсальной тригонометрической подстановки $\mathrm{t} = \mathrm{tg}\frac{\mathrm{x}}{2}$ сводятся к интегралу от рациональной функции аргумента t .

В некоторых частных случаях проще применять другие подстановки, кроме универсальной.

1. Для вычисления интеграла вида $\int R(\sin x) \cos x\, dx$ применяют подстановку $t = \sin x$.
2. Для вычисления интеграла вида $\int R \sin x\, (\cos x)\, dx$ применяют подстановку $t = \cos x$.

3. Для вычисления интеграла вида $\int R(tgx)dx$ применяют подстановку $t = \cos x$.
4. Если $\int R(\sin x, \cos x) = \int R(-\sin x, -\cos x)$, т.е. если при одновременном изменении знака у $\sin x$ и $\cos x$ значение функции R не меняется, применяют подстановку $t = tgx$.
5. Если $\int R(\sin x, \cos x) = \sin^m x, \cos^n x$, то применяемая подстановка зависит от того, какие показатели m и n входят в функцию R. Возможны следующие случаи:ъ
   a) $m = 2k + 1$- нечётное число, применяется подстановка $t = \cos x$.
   b) $n = 2l + 1$- нечётное число, применяется подстановка $t = \sin x$.
   c) $m = 2k, n = 2l$ – чётные неотрицательные числа, применяют формулы понижения степени

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x) \quad , \quad \cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x) \; ,$$
$$\sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x \; ,$$

после данных преобразований подынтегральная функция сводится к виду случаев a), b) или c),но уже с меньшими показателями степени,

   d) $m = 2k, n = 2l$ – чётные, причём хотябы одно из этих чисел отрицательно, - применяется подстановка $t = tgx$.

2. Для интегрирования произведений синусов ж косинусов различных аргументов применяются следующие тригонометрические формулы:

$$\cos ax * \cos bx = \frac{1}{2}[\cos(a-b)x + \cos(a+b)x]$$
$$\sin ax * \sin bx = \frac{1}{2}[\cos(a-b)x - \cos(a+b)x]$$
$$\sin ax * \cos bx = \frac{1}{2}[\sin(a-b)x + \sin(a+b)x]$$

Пример 13. Найти $I = \int \sin 3x * \cos 4x * \cos 5x \, dx$.

Преобразуем подынтегральную функцию: $\sin 3x * \cos 4x * \cos 5x = \sin 3x * \frac{1}{2}[\cos x + \cos 9x] = \frac{1}{2}[\sin 3x * \cos x + \sin 3x * \cos 9x] = \frac{1}{4}[\sin 2x + \sin 4x + \sin(-6x) + \sin 12x] = \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{4}\sin 4x - \frac{1}{4}\sin 6x + \frac{1}{4}\sin 12x$.

Тогда окончательный результат примет вид: $I = \frac{1}{4}\int \sin 2x \, dx + \frac{1}{4}\int \sin 4x dx - \frac{1}{4}\int \sin 6x dx + \frac{1}{4}\int \sin 12x dx = -\frac{1}{8}\cos 2x - \frac{1}{16}\cos 4x + \frac{1}{24}\cos 6x - \frac{1}{48}\cos 12x + C$.

Пример 14. Найти $I = \int \sin^3 \frac{x}{3} * \cos^2 \frac{x}{3} dx$.

Этот интеграл преобразуем с помощью подстановки $y = \frac{x}{3}$, тогда $dy = \frac{dx}{3}$ и $I = \int \sin^3 y * \cos^2 y 3 \, dy = 3\int \sin^3 y * \cos^2 y \, dy$.

Последний интеграл относится к типу п.5а. Применим подстановку $t = \cos y$. Тогда $dt = -\sin y \, dy$ и $\sin^2 y = 1 - \cos^2 y = 1 - t^2$.

Окончательно получаем: $I=\int\sin^3\frac{x}{3}*\cos^2\frac{x}{3}dx=3\int\sin^3 y*\cos^2 y\,dy=-3\int(1-t^2)t^2dt=-3\int(t^2-t^4)dt=-3\left(\frac{t^3}{3}+\frac{t^5}{5}\right)+C=-\cos^3 y+\frac{3}{5}\cos^5 y+C=-\cos^3\frac{x}{3}+\frac{3}{5}\cos^5\frac{x}{3}+C.$

Замечание! При вычислении интеграла можно было ограничится подстановкой $t=\cos\frac{x}{3}$.

Пример 15. Найти $I=\int\frac{dx}{2\sin x+2\cos x+1}$.

Воспользуемся универсальной тригонометрической подстановкой $t=tg\frac{x}{2}$. При этой подстановке $\sin x,\cos x$ и dx заменяются следующими выражениями: $\sin x=\frac{2t}{1+t^2}, cos=\frac{1-t^2}{1+t^2}, dx=\frac{2dt}{1+t^2}$.

Подставив эти соотнощения в исходный интеграл, получим: $I=\int\frac{dx}{2\sin x+2\cos x+1}=\int\frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{4t}{1+t^2}+2\frac{1-t^2}{1+t^2}+1}=\int\frac{2dt}{4t+2-2t^2+1+t^2}=2\int\frac{dt}{3+4t-t^2}=-2\int\frac{dt}{(t-2)^2-7}=-\frac{1}{\sqrt{7}}\ln\left|\frac{t-2-\sqrt{7}}{t-2+\sqrt{7}}\right|+C=-\frac{1}{\sqrt{7}}\ln\left|\frac{tg\frac{x}{2}-2-\sqrt{7}}{tg\frac{x}{2}-2+\sqrt{7}}\right|+C.$

Пример 16. Найти $I=\int\frac{dx}{\sin^2 x\sin x\cos x-2\cos^2 x}$.

Для подынтегральной функции $R(\sin x,\cos x)=\frac{1}{\sin^2 x\sin x\cos x-2\cos^2 x}$, справедливо равентсво: $R(\sin x,\cos x)=R(-\sin x,-\cos x)$, поэтому воспользуемся подстановкой $t=tg\,x$. Для этого предварительно разделим числитель и знаменатель подынтегрального выражения $\cos^2 x$ и воспользуемся тем, что $dt=\frac{dx}{\cos^2 x}$: $I=\int\frac{dx}{\sin^2 x\sin x\cos x-2\cos^2 x}=\int\frac{\frac{dx}{\cos^2 x}}{\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}+\frac{\sin x}{\cos x}-2}=\int\frac{dt}{t^2+t-2}=\int\frac{dt}{(t+\frac{1}{2})^2-\frac{9}{4}}=\frac{1}{3}\ln|\frac{t+\frac{1}{2}-\frac{3}{2}}{t+\frac{1}{2}+\frac{3}{2}}|+C=\frac{1}{3}\ln|\frac{tg\,x-1}{tg\,x+1}|+C.$

2.6. Интегрирование иррациональных функций.

Для нахождения интегралов от функций, содержащих выражения $\sqrt{c\pm x^2}$, как правило, применяют следующие тригонометрические (или гиперболические) подстановки:

1) если в подынтегральную функцию входит выражение вида $\sqrt{a^2+x^2}$, то применяют подстановки $x=a\,tg\,t, x=a\,ctg\,t$ (или $x=a\,sh\,t$)
2) если в подынтегральную функцию входит выражение вида $\sqrt{a^2-x^2}$, то применяют подстановки $x=a\sin t, x=a\cos t$ (или $x=a\,th\,t$)
3) если в подынтегральную функцию входит выражение вида $\sqrt{x^2-a^2}$, то применяют подстановки $x=a\sec t, x=a\operatorname{cosec} t$ (или $x=a\,ch\,t$)

Интеграл вида $\int R(x,\sqrt{ax^2+dx+c})dx$ сводится (выделением полного квадрата в подкоренном выражении и преобразованием выражения $\sqrt{ax^2+dx+c}$ к виду $\sqrt{at^2+m}$к одному из трёх перечисленных выше типов.

Пример 17. Найти $I=\int\frac{dx}{x^2\sqrt{5-x^2}}$.

Подынтыгральная функция содержит $\sqrt{5-x^2}$, т.е. относится ко второму из выше указаных типов. Применим подстановку $x=\sqrt{5}\sin t$. Тогда $dx=\sqrt{5}\cos t dt$, $5-x^2=5-\sin^2 t=5\cos^2 t$, $\cos t=\pm\frac{\sqrt{5-x^2}}{\sqrt{5}}$.

Знак определяется четвертью, в которой лежит переменная t.

$I=\int\frac{dx}{x^2\sqrt{5-x^2}}=\int\frac{\sqrt{5}\cos t}{5\sin^2 t(\pm\sqrt{5}\cos t)}dt=\pm\frac{1}{5}\int\frac{dt}{\sin^2 t}=\pm\frac{1}{5}(-ctg\ t)+C=$
$-\frac{1}{5}(\pm ctg\ t)+C=-\frac{1}{5}\left(\pm\frac{\cos t}{\sin t}\right)+C=-\frac{1}{5}\left(\frac{\pm\cos t}{\sin t}\right)+C=-\frac{1}{5}\left(\frac{\sqrt{5-x^2}*\sqrt{5}}{\sqrt{5}*x}\right)+C=$
$-\frac{1}{5}\frac{\sqrt{5-x^2}}{x}+C.$

При возвращении к переменной x мы пользовались тем, что $\pm\cos t=\sqrt{5-x^2}$.

Пример 18. Найти $I=\int x^3\sqrt{x^2-7}dx$.

Подынтегральная функция относится к третьему типу, поэтому применим подстановку $x=\sqrt{7}\sec t$. Тогда $dx=\frac{\sqrt{7}\sin t}{\cos^2 t}dt, x^2-7=7\sec^2 t-7=7tg^2 t$, $tg\ t=\pm\frac{\sqrt{x^2-7}}{\sqrt{7}}$.

$I=\int x^3\sqrt{x^2-7}dx=\int 7^{\frac{3}{2}}\sec^3 t\left(\pm\sqrt{7}tg\ t\right)\frac{\sqrt{7}\sin t}{\cos^2 t}dt=\pm 7^{\frac{5}{2}}\int\frac{\sin^2 t}{\cos^6 t}dt.$

Выбор знака определяется той четвертью, в которой лежит переменная t. Последний интеграл найдём с помощью подстановки $u=tg\ t$: $\int\frac{\sin^2 t}{\cos^6 t}dt=\int u^2(1+u^2)du=\frac{1}{3}u^3+\frac{1}{5}u^5+C_1=\frac{1}{3}tg^3\ t+\frac{1}{5}tg^5\ t+C_1$.

Таким образом, $I=\pm 7^{\frac{5}{2}}\left(\frac{1}{3}tg^3\ t+\frac{1}{5}tg^5\ t\right)+C=\pm 7^{\frac{5}{2}}(\frac{1}{3}(\pm\frac{\sqrt{x^2-7}}{\sqrt{7}})^3+\frac{1}{5}(\pm\frac{\sqrt{x^2-7}}{\sqrt{7}})^5)+C=\pm 7^{\frac{5}{2}}\left(\frac{1}{3}\frac{(x^2-7)^{\frac{3}{2}}}{7^{\frac{3}{2}}}\right)\pm\left(\frac{1}{5}\frac{(x^2-7)^{\frac{5}{2}}}{7^{\frac{5}{2}}}\right)+C=\frac{7}{3}(x^2-7)^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{5}(x^2-7)^{\frac{5}{2}}+C$.

Переходя к переменной x, мы воспользовались тем, что $tg\ x=\pm\frac{\sqrt{x^2-7}}{\sqrt{7}}, tg^3x=\pm(\frac{\sqrt{x^2-7}}{\sqrt{7}})^3$ и $tg^5x=\pm(\frac{\sqrt{x^2-7}}{\sqrt{7}})^5$

Раздел 3. Определённый интеграл

Литература

[1. (гл.4 ст.171-210)]
[2. (ст.117-172)]
[3. №1534-1619(выборочно))]

Изучаемые вопросы

1. Определенный интеграл как предел интегральных сумм. Задачи, приводящие к вычислению определенного интеграла. Геометрический омысл определенного интеграла. Необходимое условие интегрирования функции на отрезке. Достаточное условие интегрирования функции на отрезке. Простейшие свойства интеграла. Теорема о среднем значении определенного интеграла.
2. Производная интеграла по переменному верхнему пределу. Формула Ньютона-Лейбница.
3. Вычисление определенного интеграла методом замены переменной. Интегрирование по частям.
4. Несобственный интеграл с бесконечными пределами (I рода) и от неограниченной функции (П рода). Основные овойства. Понятие об абсолютной и условной сходимости. Признаки сходимости.
5. Приложения определенного интеграла. Вычисление площадей плоских фигур в декартовых и полярных координатах. Вычисление длины дуги. Применение интеграла к вычислению объема тела и площади поверхности вращения. Механические приложения определенного интеграла.

Определенный интеграл находит широкое применение в различных разделах математики и других естественных науках. Некоторые наиболее типичные из них будут разобраны в этом разделе. Предварительно будет дано определение и сформулированы основные овойства определенного интеграла.

3.1.Определенный интеграл как предел интегральных сумм

Пусть на отрезке [a,b] задана функция f(x). Разобъём отрезок [a,b] на n частей точками $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ и положим $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, i = 1,2, \dots, n$. В каждом из отрезков $[\, x_{i-1}, x_i\,]$ выберем внутреннюю точку ξ_i и вычислим за ней значение функции $f(\xi_i)$ (рис.4). Затем усножим значение функции $f(\xi_i)$ на длину соответствующего отрезка Δx_i и просуммируем полученные произведения по $i = 1,2, \dots, n$.

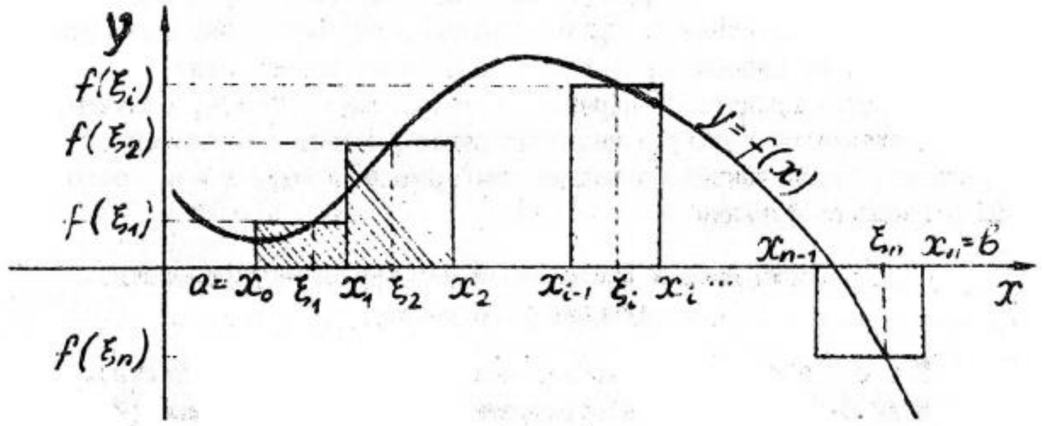


Рис. 4

Полученная сумма $S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ называется интегральной суммой функций f(x) на отрезке [a,b].

Определённым интегралом функции f(x) на отрезке [a,b] называется предел интегральных сумм S_n при измельчении отрезка [a,b] (увеличении числа точек разбиения) и стремлении к нулю максимальной длины отрезков разбиения, если этот предел существует, не зависит от способа разбиения отрезка точками x_i и от выбора ξ_i.

Определённый интеграл функции f(x) на отрезке обозначают $\int_a^b f(x)dx$.

Таким образом, по определению имеем:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \max\limits_i \Delta x_i \to 0}} S_n = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \max\limits_i \Delta x_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

Числа a и b называют верхним и нижним пределами интегрирования.

Замечание. Определение определённого интеграла давалось для случая a<b. В случае, когда b <a, положим по определению $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$.

В случае a=b примем $\int_a^b f(x)dx = 0$.

3.2. Геометрический смысл определенного интеграла

Геометрически интегральная сумма представляет собой алгебраическую сумму площадей прямоугольников, стороны которых равны Δx_i и $f(\xi_i)$ соответственно, причем площади, расположенные выше оси OX, берутся оо знаком плюс, ниже оси OX - со знаком минус.

Совершая предельный переход $\begin{matrix} n \to \infty \\ \max\limits_i \Delta x_i \to 0 \end{matrix}$, получим, что определенный интеграл численно равен площади криволинейной трапеции, ограниченной вертикальными прямыми x = a , x = b , осью OX и графиком функции y=f(x).

Необходимое и достаточное условия интегрируемости функвдй на отрезке

Теорема 1 (Необходимое условие интегрируемости).

Если функция f(x) интегрируема на некотором отрезке [a,b], то она ограничена на этом отрезке.

Теорема 2 (Достаточное условие интегрируемости).

Непрерывная на отрезке [a,b] функция интегрируема на этом отрезке.

Замечание. Непрерывность функции является лишь достаточным условием интегрируемости, но не является необходимым, т.е. существуют интегрируемые» но разрывные на отрезке [a,b] функции. Например функция $f(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$, на отрезке [-1,1] имеет разрыв первого рода при x=0, но является интегрируемой на отрезке [-1,1].

3.3. Простейшие свойства определенного интеграла

1. Постоянный мнозкитель можно выносить за знак определенного интеграла: $\int_a^b Af(x)dx = A\int_a^b f(x)dx\,, A = const.$
2. Определенный интеграл от алгебраической суммы двух функций равен алгебраической оумме интегралов слагаемых: $\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$
3. Если $f(x) \leq g(x)$ на отрезке $[a, b]$, то $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$
4. Если $M = \max\limits_{x\in[a,b]} f(x)\,,\ m = \min\limits_{x\in[a,b]} f(x)$, то $m(b - a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b - a)$.
5. Теорема о среднем. Если функция f(x) непрерывна на [a,b], то существует такая точка ξ из интервала [a,b], что $\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b - a)$.
6. Если f(a) интегрируема на [a,b], то для любого значения $c\epsilon(a, b)$ выполняется равентво $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$

3.4. Определённый интеграл с переменным верхним пределом

Пусть функция f(x) непрерывна на [a,b]. Тогда она интегрируема на любом отрезке [a,x], где $a \leq x \leq b$, то есть для любого $x \in [a, b]$ существует интеграл $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, который называется определённым интегралом с переменным верхним пределом. Имеет место следующая теорема.

Теорема 3. Производная определенного интеграла от непрерывой на отрезке [a,b] функции f(x), рассматриваемого как функция его верхнего предела, существует и равна значению подынтегральной функции в точке дифференцированная: $F'(x) = (\int_a^x f(t)dt)'_x = f(x), x \in [a, b]$.

3.5. Формкла Ньютона-Лейбница

Если F(x) – первообразная функция для непрерывной на отрезке [a,b] функции f(x), т.е. $F'(x) = f(x)$, то определеный интеграл от функции f(x) вычисляется по формуле, $\int_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a)$, называемой формулой Ньютона-Лейбница.

Эта формула позволяет свести вычисление определённого интеграла к вычислению неопределённого интеграла.

Пример 1. Вычислить $\int_1^2 x^3 dx$.

Решение. $\int_1^2 x^3 dx = \frac{x^4}{4}|_1^2 = \frac{2^4}{4} - \frac{1^4}{4} = 4 - \frac{1}{4} = \frac{15}{4}$.

Замечание. При вычислении определенного интеграла используются все изложенные ранее методы интегрирования для неопределенного интеграла. Поэтому приведем лишь примеры с использованием метода подстановки (замены переменной) и интегрирования по частям.

3.6. Вычисление определенного интеграла при помощи замены переменной

Для вычисления определенного интеграла $\int_a^b f(x)dx$ от непрерывной функции $f(x)$ иногда удобно воспользоваться заменой переменной, положив $x = \varphi(t)$. При этом, если функция $\varphi(t)$ удовлетворяет условиям:

1) $\varphi(t)$ определена и непрерывна на некотором отрезке $[t_0, t_1]$;
2) $\varphi(t) \in [a, b]$ для всех $t \in [t_0, t_1]$;
3) $\varphi(t_0) = a, \varphi(t_1) = b$;
4) на отрезке $[t_0, t_1]$ функция $\varphi(t)$ имеет непрерывную производную $\varphi'^{(t)}$, то имеет место равенство $\int_a^b f(x)dx = \int_{t_0}^{t_1} f\big(\varphi(t)\big) * \varphi'(t)dt$.

Замечание. При вычислении определенного интеграла с помощью замены переменной нет необходимости возвращаться к исходной переменной, как это делалось при вычислении неопределенного интеграла, надо лишь обратить внимание на нахождение новых пределов интегрирования для новой переменной.

Пример 2. $\int_{2\sqrt{2}}^1 \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}$

Решение. Положим $x = \varphi(t) = \sin t$. Выберем пределы интегрирования t_0, t_1 так, чтобы на отрезке $[t_0, t_1]$ выполнялись условиям 1)-4). Из условия 3) имеем: $\sin t_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$, откуда $t_0 = (-1)^n \frac{\pi}{4} + \pi n$, $n = 0, \pm 1, \ldots$, в частности, можно $t_0 = \frac{\pi}{4}$. Далее, $\sin t_1 = 1$, откуда $t_1 = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n = 0, \pm 1, \ldots$, в частности, можно положить $t_1 = \frac{\pi}{2}$. На отрезке $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$ функция $\varphi(t) = \sin t$ определена и непрерывна, и её значения выходят за пределы отрезка $[\frac{\sqrt{2}}{2}, 1]$, когда $t \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$. На отрезке $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$ существует непрерывная производная $\varphi'^{(t)} = \cos t$. Итак, указанная замена удовлетворяет условиям 1)-4), поэтому имеем: $\int_{2\sqrt{2}}^1 \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2} dx =$

$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{1-\sin^2 t}}{\sin^2 t} \cos t\, dt = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 t}{\sin^2 t} dt = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin^2 t}{\sin^2 t} dt = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{\sin^2 t} - 1\right) dt = (-ctg\ t - t)|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = -ctg\ \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} + ctg\ \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = 0 - \frac{\pi}{2} + 1 + \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{\pi}{4}.$

3.7. Формула интегрирования по частям

Пусть функции $u(x)$и $v(x)$ непрерывны на отрезке $[a, b]$ вместе со своими производными $u'(x)$и $v'(x)$. Тогда имеет место Формула интегрирования по частям:

$$\int_a^b udv = uv|_a^b - \int_a^b vdu.$$

Пример 3. Вычислить $\int_1^e x^2 \ln x\, dx$.

Решение. Положим $u = \ln x\,, dv = x^2 dx$, откуда $du = \frac{1}{x}, v = \frac{x^3}{3}$. Заметим, что функции $u(x), v(x), u'(x), v'(x)$ непрерывны на [1, e]. Применяя формулу интегрирования по частям, получим $\int_1^e x^2 \ln x\, dx = \frac{x^3}{3} \ln x\,|_1^e - \int_1^e \frac{x^3}{3} * \frac{1}{x} dx = \frac{e^3}{3} - \frac{1}{3}\int_1^e x^2\, dx = \frac{e^3}{3} - \frac{1}{3} * \frac{x^3}{3}|_1^e = \frac{e^3}{3} - \frac{e^3}{9} + \frac{1}{9} = \frac{2}{9}e^3 + \frac{1}{9} = \frac{1}{9}(2e^3 + 1).$

Пример 4. Вычислить $\int_0^\pi x^2 \cos x\, dx$.

Решение. Положим $u = x^2, dv = \cos x\, dx$, откуда $du = 2x, v = \sin x$. Заметим, что функции $u(x), v(x), u'(x), v'(x)$ непрерывны на [0, π]. Применяя формулу интегрирования по частям, получим $\int_0^\pi x^2 \cos x\, dx = x^2 \sin x\,|_0^\pi - 2\int_0^\pi x \sin x\, dx = -2\int_0^\pi x \sin x\, dx$.

Для вычисления интеграла $\int_0^\pi x \sin x\, dx$ ещё раз применим формулу интегрирования по частям, положив $u = x, dv = \sin x\, dx$, откуда $du = dx, v = -\cos x$. (Почему это возможно?)

Получим $\int_0^\pi x \sin x\, dx = -xcos\ x|_0^\pi + \int_0^\pi \cos x\, dx = \pi + \sin x|_0^\pi = \pi.$

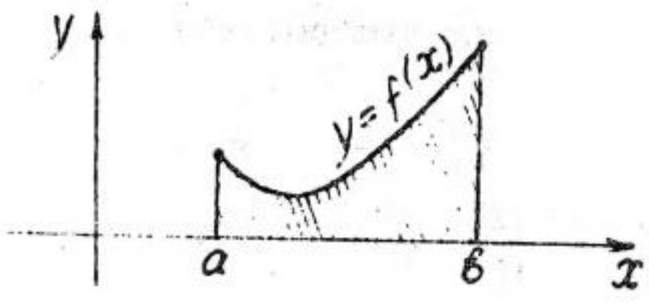
Окончательно получим $\int_0^\pi x^2 \sin x\, dx = -2\pi.$

3.8. Геометрические приложения определенного интеграла

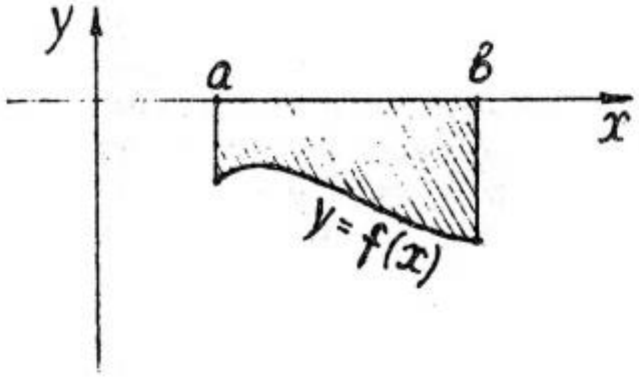
С использованием определенного интеграла можно находить площади плоских областей, длины дуг плоских кривых, вычислять объем и площади поверхности вращения. Для решения задач такого типа необходимо выполнить грамотный чертеж фигуры или тела.

3.8.1. Вычисление площадей плоских областей в декартовых координатах

Для вычисления площади плоской области в декартовой системе координат применяется известная формула для вычисления площади криволинейной трапеции, ограниченной вертикальными прямыми x=a, x=b, осью OX и графиком неотрицательной непрерывной или кусочно непрерывной функции y=f(x) (рис. 5): $S = \int_a^b f(x)dx$



Если $f(x) \leq 0$ при $x \in [a, b]$ (рис.6), то $S = -\int_a^b f(x)dx$



В более общем случае, если криволинейная трапеция ограничена вертикальными прямыми x=a, x=b, и графиками двух непрерывных или кусочно-непрерывных функций $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$, причем $f_1(x) \leq f_2(x)$ (рис, 7), то ее площадь вычисляется по формуле: $S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))dx$.

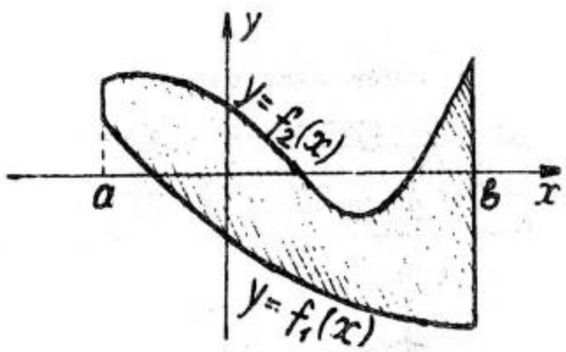


Рис. 7

Пример 5. Вычислить площадь области, ограниченной линиями $y = x^2 - 4$ и $y = -x^2 + 2x$.

Решение. Построим графики функций $y = x^2 - 4$ и $y = -x^2 + 2x$. Для того второе уравнение преобразуем, выделив полный квадрат в правой части: $y = -(-x^2 - 2x * 1 + 1 - 1) = -((-x^2 - 2x + 1) - 1) = -(x - 1)^2 + 1$. Определим точки пересечения линий, приравняв правые части уравнений: $x^2 - 4 = -x^2 + 2x$, откуда $2x^2 - 2x - 4 = 0$ или $x^2 - x - 2 = 0$.

Решая квадратное уравнение, находим корни $x_1 = 2, x_2 = 1$.

Изобразим линии на рисунке (рис.8)

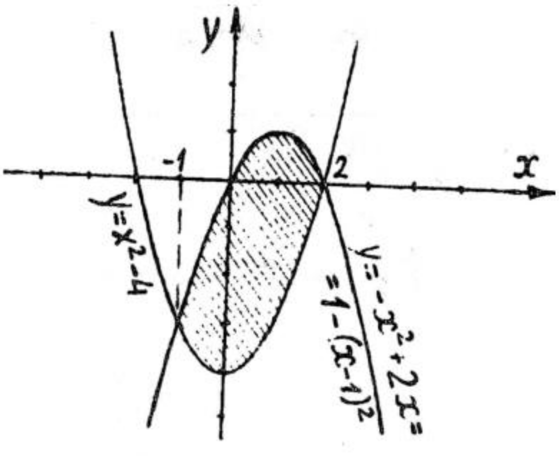


Рис. 8

Вычислим площадь: $S = \int_{-1}^{2}((-x^2+2x)-(x^2-4))dx = \int_{-1}^{2}(2x - x^2 - x^2 + 4)dx = \int_{-1}^{2}(-2x^2+2x+4)dx = 2\left(-\frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{2} + \frac{x^2}{2}\Big|_{-1}^{2} + 2x\Big|_{-1}^{2}\right) = 2\left(-\frac{8}{3} - \left(-\frac{(-1)^3}{3}\right) + \frac{4}{2} - \frac{1}{2} + 4 + 2\right) = 2\left(-\frac{8}{3} - \frac{1}{3} + 8 - \frac{1}{2}\right) = 2\left(-3 + 8 - \frac{1}{2}\right) = 2\left(5 - \frac{1}{2}\right) =$ 9(кв. ед.).

3.8.2. Вычисление площади облаете в полярных координатах

Для вычисления площади области в полярной системе координат (ρ, φ) за основу берется формула площади криволинейного сектора, ограниченной лучами $\varphi = \alpha$ и $\varphi = \beta$ и кривой $\rho = f(\varphi)$, где $f(\varphi)$ непрерывна или кусочно-непрерывна на $[\alpha, \beta]$. (рис. 9). $S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} \rho^2 d\varphi = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi) d\varphi.$

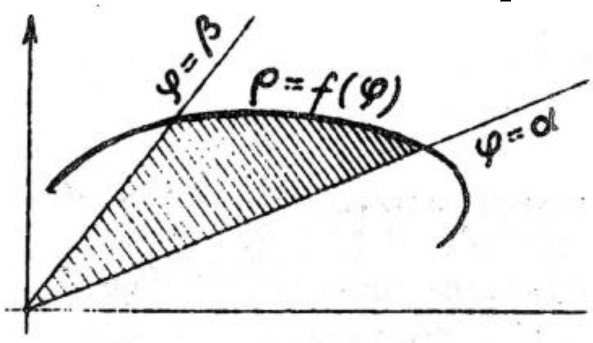


Рис. 9

В более общем случае (рис.10) применяется формула $S=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}(f_2^2(\varphi)-f_1^2(\varphi))d\varphi$.

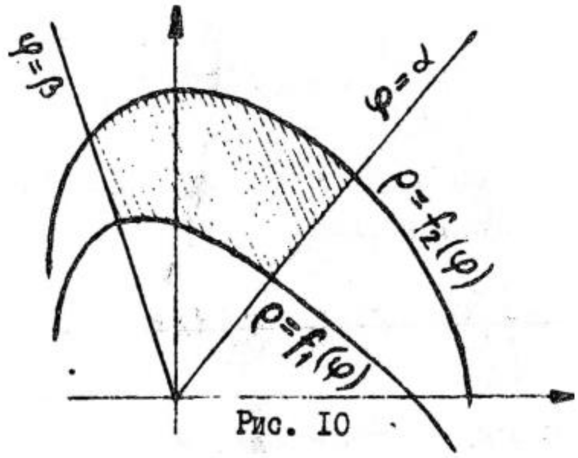


Рис. 10

Пример 6. Вычислить площадь, ограниченную кривой $\rho=a\sqrt{\cos 2\varphi}$(лемниската Бернулли).

Решение. Построим чертёж (рис.11).

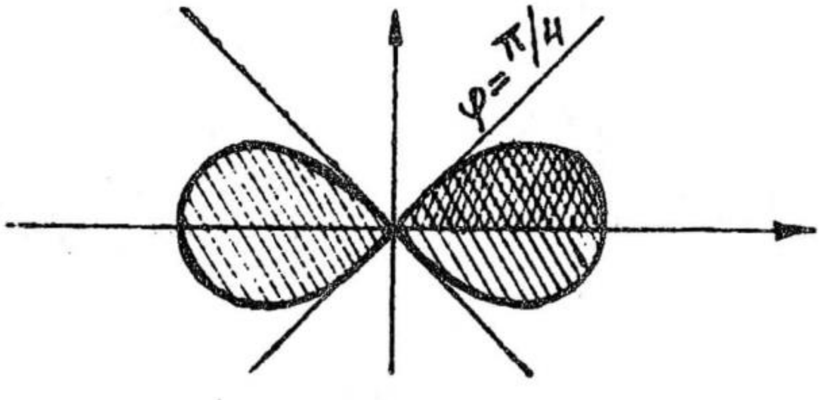


Рис. 11

Вычислим ¼ часть площади и умножим результат на 4: $S=4*\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(a\sqrt{\cos 2\varphi}\right)^2 d\varphi=2a^2*\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2\varphi\,(d2\varphi)=a^2\sin 2\varphi\,|_0^{\frac{\pi}{4}}=a^2\sin\frac{\pi}{2}=a^2$(кв.ед.)

3.8.3. Вычисление площади области при параметрическом задании ее границ

Пусть задана криволинейная трапеция, ограниченная осью OX, вертикальными прямыми $x=a, x=b$ и кривой, параметрические уравнения которой $x=\varphi(t), y=\psi(t),\ t\in[\alpha,\beta]$, причем $\varphi(\alpha)=a, \varphi(\beta)=b$. Функции $\varphi(t), \varphi'(t), \psi'(t)$ непрерывны или кусочно-непрерывны $[\alpha,\beta]$.

Пусть при этом функции $x=\varphi(t),\ y=\psi(t), t\in[\alpha,\beta]$ определяют на $[\alpha,\beta]$ некотурую непрерывную или кусочно-непрерывную функцию $y=f(x)\geq 0$. Тогда площадь криволинейной трапеции вычисляется по формуле: $S=\int_{\alpha}^{\beta}\varphi(t)*\varphi'(t)dt$.

Пример 7. Найти площадь области, ограниченной: $x = a\cos^3 t\, , y = a\sin^3 t$ (рис.12).

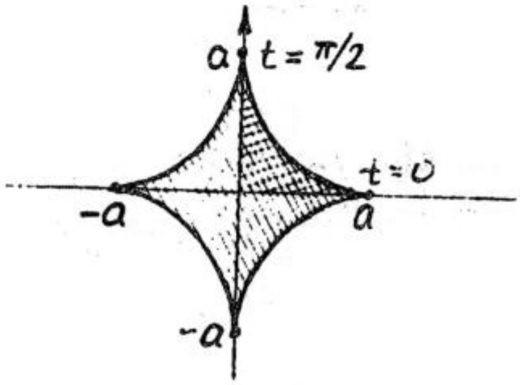


Рис. 12

Вычислим ¼ S, результат умножим на 4. Заметим, что когда x меняется от 0 до a, параметр t меняется от $\frac{\pi}{2}$ до 0, так как при x=0 имеем $a\cos^3 t = 0$, откуда $\cos t = 0$ и можно взять $t_1 = \alpha = \frac{\pi}{2}$, а при x=a имеем $a\cos^3 t = 1$ и можно $t_2 = \beta = 0$. Поэтому имеем: $S = 4\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}(a\sin^3 t)(a\cos^3 t)'dt = 4\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} a\sin^3 t\,(-3\,a\cos^2 t\sin t)dt = -12a^2\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\sin^4 t\cos^2 t\, dt =$
$12a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 t\cos^2 t\, dt.$

Воспользуемся формулами: $\sin^2 t = \frac{1}{2}(1-\cos 2t), \cos^2 t = \frac{1}{2}(1+\cos 2t).$

Получим $12a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 t\cos^2 t\, dt = 12a^2 * \frac{1}{4} * \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 2t)^2\,(1+\cos 2t)dt =$
$\frac{3}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 2t)\,(1-\cos^2 2t)dt = \frac{3}{2}a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 2t-\cos^2 2t+\cos^3 2t)dt =$
$\frac{3}{2}a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}dt - \frac{3}{2}a^2\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 2t\, d(2t) - \frac{3}{2}a^2\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 4t)dt +$
$\frac{3}{2}a^2\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 2t\cos 2t\, d(2t) = \frac{3}{2}a^2 t|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{3}{4}a^2\sin 2t\,|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{3}{4}a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}dt -$
$\frac{3}{4}a^2\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 4t d(4t) + \frac{3}{4}a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^2 2t)\, d\sin 2t = \frac{3}{4}a^2\pi - \frac{3}{4}a^2 t|_0^{\frac{\pi}{2}} -$
$\frac{3}{16}a^2\sin 4t|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{3}{4}a^2\sin 2t|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{3}{4} * \frac{\sin^3 2t}{3}|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3}{4}\pi a^2 - \frac{3}{8}\pi a^2 = \frac{3}{8}\pi a^2(\text{кв. ед.})$

3.8.4. Вычисление длины дуги плоской кривой в декартовых координатах

Длина дуги кривой, заданной уравнением y=f(x) на отрезке [a,b], где функция f(x) непрерывно дифференцируема, вычисляется по формуле

$$l = \int_a^b \sqrt{1+(y')^2}\, dx = \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\, dx$$

Пример 8. Найти длину дуги кривой $y = x^{\frac{3}{2}}$ на отрезке [0;1] (рис.13).

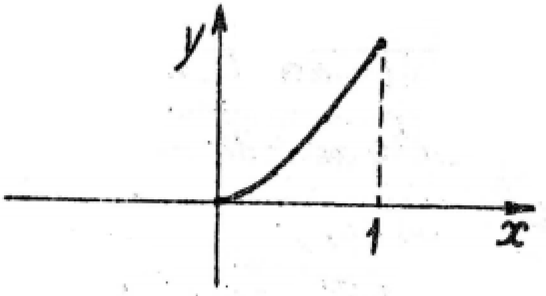


Рис. I3

Решение. Имеем : $y = x^{\frac{3}{2}}$, откуда $y' = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$. Поэтому $l = \int_0^1 \sqrt{1 + (\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}})^2}\, dx = \int_0^1 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x}\, dx = \frac{4}{9}\int_0^1 \left(1 + \frac{9}{4}\mathrm{x}\right)^{\frac{1}{2}} d\left(1 + \frac{9}{4}x\right) = \frac{4}{9} * \frac{2}{3} * \left(1 + \frac{9}{4}x\right)^{\frac{3}{2}} |_0^1 = \frac{8}{27}\left(\frac{13\sqrt{13}}{8} - 1\right)$.

3.8.5. Вычисление длины дуги плоской кривой в полярных координатах

Длина дуги кривой, заданной уравнением $\rho = f(\varphi), \varphi \epsilon [\alpha, \beta]$, где $f(\varphi)$ непрерывно дифференцируема на отрезке $[\alpha, \beta]$, вычисляется по формуле:

$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{\rho^2 + (\rho')^2}\, d\varphi = \int_\alpha^\beta \sqrt{f^2(\varphi) + (f'(\varphi))^2}\, d\varphi$.

Пример 9. Найти длину кардиоиды $\mathrm{r} = \mathrm{a}(1 - \cos\varphi)$ (рис.14)

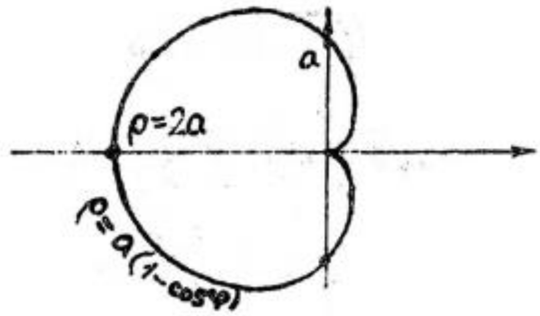


Рис. I4

Решение. В силу симметрии кривой относительно полярной оси вычислим половину её длины, затем удвоим результат. При этом φ меняется от 0 до π.

Имеем: $l = 2\int_0^\pi \sqrt{(a(1 - \cos\varphi))^2 + ((a(1 - \cos\varphi))')^2}\, d\varphi = 2a\int_0^\pi \sqrt{(1 - \cos\varphi)^2 + \sin^2\varphi}\, d\varphi = 2a\int_0^\pi \sqrt{1 - 2\cos\varphi + \cos^2\varphi + \sin^2\varphi}\, d\varphi = 2a\int_0^\pi \sqrt{2 - 2\cos\varphi}\, d\varphi = 2a\sqrt{2}\int_0^\pi \sqrt{1 - \cos\varphi}\, d\varphi = 2a\sqrt{2}\int_0^\pi \sqrt{2\sin^2\frac{\varphi}{2}}\, d\varphi = 2a\sqrt{2}\sqrt{2}\int_0^\pi \sin\frac{\varphi}{2}\, d\varphi = 4a * 2\int_0^\pi \sin\frac{\varphi}{2}\, d\left(\frac{\varphi}{2}\right) = -8a\cos\frac{\varphi}{2} |_0^\pi = 8a$.

3.8.6. Вычисление длины дуги кривой, заданой параметрически

Пусть кривая задана параметричекими уравнениями $x = \varphi(t), y = \psi(t), t \in [\alpha, \beta]$, где функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ непрерывно дифференцируемы на отрезке $[\alpha, \beta]$.

Тогда длины дуги кривой вычисляется по формуле: $l=\int_\alpha^\beta \sqrt{(x_t')^2+(y_t')^2}\,dt=\int_\alpha^\beta \sqrt{(\varphi'(t))^2+(\psi'(t))^2}\,dt$ причём α<β.

Пример 10. Найти длину первой арки циклоиды: $x=a(t-\sin t), y=a(1-\cos t), a>0$ (рис.15).

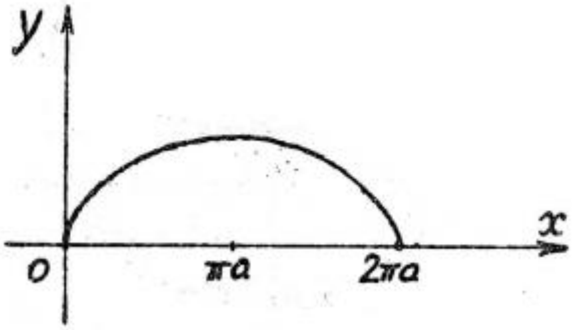


Рис. I5

Решение. Для первой арки циклоиды $t\in[0,2\pi]$.

Имеем $l=\int_0^{2\pi}\sqrt{(a(t-\sin t)')^2+(a(t-\cos t)')^2}dt=a\int_0^{2\pi}\sqrt{(1-\cos t)^2+\sin^2 t}\,dt=a\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\sqrt{1-\cos t}\,dt=a\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\sqrt{2\sin^2\frac{t}{2}}dt=a\sqrt{2}\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}d\left(\frac{t}{2}\right)=-4a\cos\frac{t}{2}\Big|_0^{2\pi}=4a+4a=8a.$

3.8.7. Вычисление объёмов тел вращения

Пусть тело получено вращением вокруг оси OX криволинейной трапеции, ограниченной прямыми $x=a, x=b$, осью OX и графиком функции y=f(x), которая является непрерывной или кусочно-непрерывной (рис.16). Тогда его объём находится по формуле: $V=\pi\int_a^b f^2(x)\,dx$.

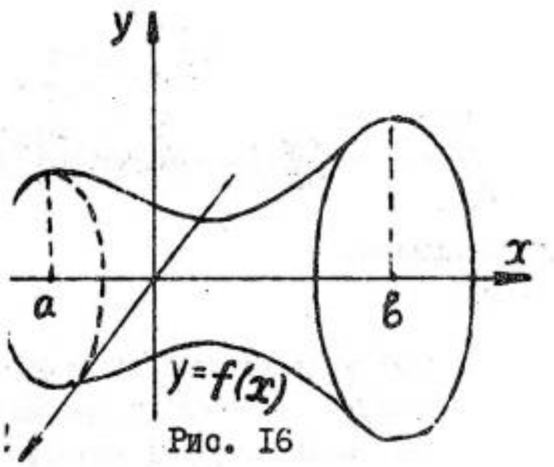


Рис. I6

Если же тело получено вращением криволинейной трапеции, ограниченной прямыми $y=a, y-=b$, осью OY и графиком непрерывной или кусочно-непрерывной функции x=f(y), то объём этого тела вычисляется по формуле: $V=\pi\int_a^b f^2(y)\,dy$.

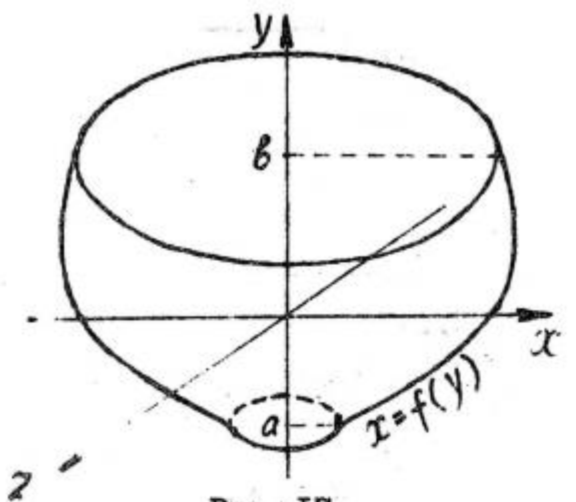


Рис. 17

Пример 11. Плоская область, ограниченная кривыми $y = x^2$ и $y = \sqrt{x}$, вращается вокруг оси OX. Определить объём тела вращения (рис.18).

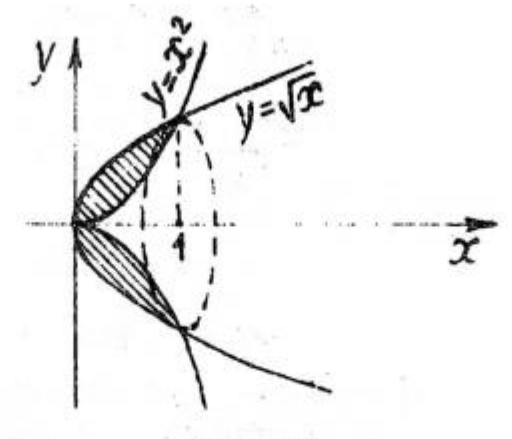


Рис. 18

Решение. Для нахождения требуемого объёма вычтем из объёма тела, образованного вращением кривой $y = \sqrt{x}$ вокруг отрезка [0,1] объём тела, образованного вращением кривой $y = x^2$ вокруг отрезка [0,1]: $V = \pi \int_0^1((\sqrt{x})^2 - (x^2)^2)dx = \pi \int_0^1(x - x^4)\, dx = \pi \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{5}\right) |_0^1 = \pi \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5}\right) = \frac{3\pi}{10}$(куб. ед.).

3.8.8. Вычисление площади поверхности тела вращения

Площадь поверхности тела, образованного вращением вокруг оси OX криволинейной трапеции, ограниченной осью OX, прямыми $x = a, x = b$ и графиком неотрицательной непрерывной дифференцируемой функции y=f(x) (см.рис.15) вычисляется по формуле: $S = 2\pi \int_a^b y\sqrt{1 + (y')^2}dx$.

Пример 12. Найти площадь поверхности, образованной вращением кривой $y = ch\, x$ вокруг отрезка [0,π] оси OX (рис.19).

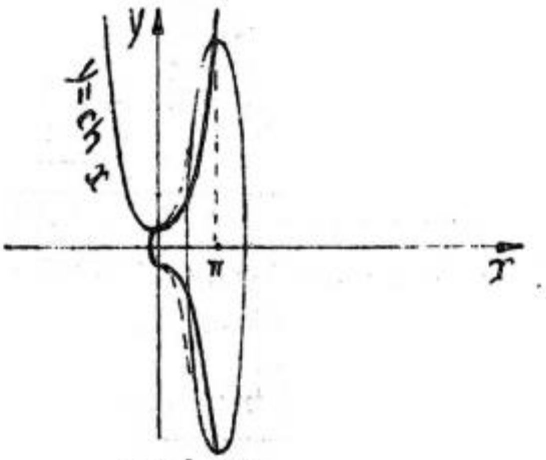


Рис. 19

Решение. Напомним основное тригонометрическое тождество для гиперболических функций: $ch^2x - sh^2x = 1$ и формулы Эйлера: $sh\,x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, ch\,x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$.

Имеем: $S = 2\pi\int_0^{\pi} ch\,x\sqrt{1 + ((ch\,x)')^2}dx = 2\pi\int_0^{\pi} ch\,x\sqrt{1 + sh^2x}dx = 2\pi\int_0^{\pi} ch^2x\,dx = 2\pi\int_0^{\pi}(\frac{e^x+e^{-x}}{2})^2\,dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}(e^{2x} + 2 + e^{-2x})\,dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} e^{2x}dx + \pi\int_0^{\pi} dx + \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} e^{-2x}\,dx = \frac{\pi}{4}e^{2x}|_0^{\pi} + \pi x|_0^{\pi} + \frac{\pi}{4}e^{-2x}|_0^{\pi} = \frac{\pi}{4}e^{2\pi} - \frac{\pi}{4} + \pi^2 - \frac{\pi}{4}e^{-2\pi} + \frac{\pi}{4} = \pi^2 + \frac{\pi}{2}\left(\frac{e^{2\pi} - e^{-2\pi}}{2}\right) = \pi^2 + \frac{\pi}{2}sh2\pi(\text{кв. ед})$.

3.9. Несобственные интегралы

При определении интеграла $\int_a^b f(x)dx$ мы предполагали, что отрезок [a,b] конечен и функция f(x) на этом отрезке определена и ограничена. Если одно из этих условий нарушено, то интеграл называется несобственным интегралом. Если нарушено условие конечности границ отрезка [a,b] , то получим интеграл с бесконечными пределами интегрирования (несобственный интеграл 1 рода), если же нарушено условие ограниченности функции на отрезке [a,b] , получим интеграл от неограниченной функции (несобственный интеграл 2 рода).

3.9.1. Несобственные интегралы с бесконечными пределами интегрирования (1 рода)

Пусть функция f(x) непрерывна на интервале [a,b]. Тогда предел $\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx$ называется несобственным интегралом с бесконечным верхним пределом и обозначается $\int_a^{+\infty} f(x)dx$. Таким образом $\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx.$

Если этот предел существует и конечен, то несобственный интеграл называется сходящимся, если бесконечен или не существует, расходящимся.

Аналогично определяется интеграл с бесконечным нижним пределом:

$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{b} f(x)dx$ и интеграл с бесконечными пределами интегрирования: $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)dx\,, c \in (-\infty, +\infty)$.

Приведем примеры вычисления несобственных интегралов 1 рода и доказательства их расходимости при помощи определения.

Пример 13. Исследовать на сходимость несобственный интеграл $\int_{2}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+4}$ и в случае сходимости вычислить его значение.

Решение. По определению имеем: $\int_{2}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+4} = \lim_{b\to+\infty} \int_{2}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+4} = \frac{1}{2} \lim_{b\to+\infty} arctg\frac{x}{2}|_2^b = \frac{1}{2} \lim_{b\to+\infty} \left(arctg\frac{b}{2} - arctg\ 1\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2} * \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{8}$, то есть интеграл сходится и равен $\frac{\pi}{8}$.

При решении этого примера мы воспользовались тем, что $\lim_{b\to+\infty} arctg\ t = \frac{\pi}{2}$.

Замечание. Геометрически это означает, что площадь неограниченной области, расположенной между графиком функции $y = \frac{1}{x^2+4}$ и осью ОХ,

$x \geq 2$ (рис.20) конечна и равна $\frac{\pi}{8}$.

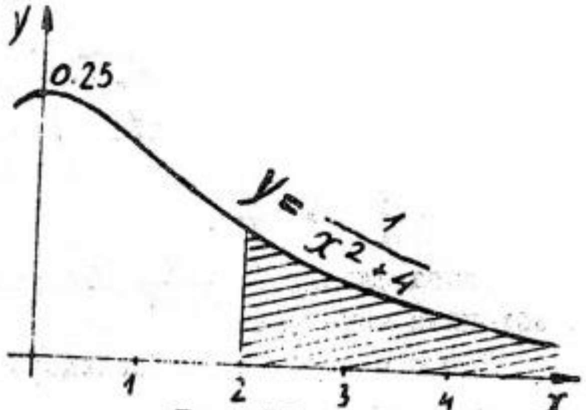


Рис. 20

Пример 14. Исследовать на сходимость интеграл $\int_{e}^{+\infty} \frac{dx}{x\ln x}$.

Решение. По определению имеем: $\int_{e}^{+\infty} \frac{dx}{x\ln x} = \lim_{b\to+\infty} \int_{e}^{+\infty} \frac{dx}{x\ln x} = \lim_{b\to+\infty} \ln|\ln x|\,|_e^b = \lim_{b\to+\infty} \ln|\ln b| - \ln\ln e = \infty - 0 = \infty$, то есть интеграл расходится.

Здесь мы воспользовались методом подведения под знак дифференциала $\frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{x}} = d\ln x$ и тем, что $\lim_{t\to+\infty} \ln t = +\infty$.

В тех случаях, когда требуется установить сходимость или расходимость несобственного интеграла, не вычисляя его значения, удобно пользоваться следующими признаками сравнения для несобственных интегралов 1 рода.

Теорема 4. Пусть для всех x из интервала $[a, +\infty]$ выполняется неравенство: $0 \leq f(x) \leq \varphi(x)$.

Тогда:

а) если интеграл $\int_{a}^{+\infty} \varphi(x)dx$ сходится, то сходится и интеграл $\int_{a}^{+\infty} f(x)dx$;

б) если расходится интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится, то расходится и интеграл $\int_a^{+\infty} \varphi(x)dx$

Теорема 5. Пусть для всех x из интервала $[a, +\infty]$ выполняется неравенство: $|f(x)| \le \varphi(x), \varphi(x) \ge 0$.

Тогда если сходится интеграл $\int_a^{+\infty} \varphi(x)dx$ сходится, то сходится и интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$.

Пример 15. Исследовать сходимость интеграла $\int_3^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^3-2}}$.

Решение. Оценим подынтегральную функцию снизу на интервале $[3,+\infty)$: $\frac{1}{\sqrt[3]{x^3-2}} > \frac{1}{\sqrt[3]{x^3}} = \frac{1}{x}$.

Интеграл $\int_3^{+\infty} \frac{dx}{x}$ является расходящимся, поэтому в силу теоремы 4 расходится и исходный интеграл.

Определение. Несобственный интеграл 1 рода называется <u>абсолютно сходящимся,</u> если сходится интеграл $\int_a^{+\infty} |f(x)|\, dx$ и <u>условно сходящимся</u>, если интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится, а $\int_a^{+\infty} |f(x)|\, dx$ расходится.

Заметим, что интеграл в примере 14 является абсолютно сходящимся.

Замечание. Для исследования сходимости интеграла $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ надо исследовать сходимость каждого интеграла в правой части равенства $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)dx$.

Если оба интеграла сходятся, исходный интеграл будет сходящимся, если хотя бы один расходится - расходящимся.

Теорема 6. Пусть на интервале $[a,+\infty)$ выполняются следующее условия, функции f(x) и g(x) неотрицательны и непрерывны, $g(x) \ne 0$, $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = k$. Тогда:

1) Если $0 \le k < +\infty$ и интеграл $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ сходится, то интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ также сходится.
2) Если $0 \le k < +\infty$ и интеграл $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ расходится, то интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ также расходится.

В частности, если $f(x) \sim g(x), x \to \infty$, то есть $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$, то интрегралы $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ и $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ сходятся и расходятся одновременно.

Замечание. Для сравнения с подынтегральной функцией часто удобно использовать функцию $\frac{1}{x^\alpha}$, пользуясь тем, что $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ сходится при α>1 и расходится при $\alpha \le 1$.

Пример 16. Исследовать на сходимость интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{(x+3)dx}{x^4+3x+\sqrt{x}}$ эквивалент функции $g(x) = \frac{1}{x^3}$ при $x \to \infty$. Действительно, $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\frac{x+3}{x^4+3x+\sqrt{x}}}{\frac{1}{x^3}} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^4+3x^3}{x^4+3x+\sqrt{x}} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1+\frac{3}{x}}{1+\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^{\frac{7}{2}}}} = 1.$

Значит в силу теоремы 6 исходный интеграл ведет себя так же, как интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^3}$, который сходится (см. замечание к теореме 6), следовательно сходится и исходный интеграл.

Пример 17. Исследовать на сходимость $\int_1^{+\infty} \frac{2\sqrt{x}+3\sqrt[3]{x}}{2x+3^{-x}} dx$.

Решение. Подынтегральная функция $f(x) = \int_1^{+\infty} \frac{2\sqrt{x}+3\sqrt[3]{x}}{2x+3^{-x}}$ эквивалентна функции $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$. Действительно: $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\frac{2\sqrt{x}+3\sqrt[3]{x}}{2x+3^{-x}}}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x+3x^{\frac{5}{6}}}{2x+3^{-x}} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{2+\frac{3}{x^{-\frac{1}{6}}}}{2+\frac{3^{-x}}{x}} = 1$, так как $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{3^{-x}}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{3^x * x} = 0.$

А так как интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}$ расходится (см. замечание к теореме 6), то исходный интеграл также расходится.

3.9.2. Несобственный интеграл от разрывной функции (2 рода)

Определение. Пусть функция f(x) определена и непрерывна на полуинтервале [a, b) , а при x=b либо не определена, либо имеет разрыв. Тогда предел $\lim\limits_{\varepsilon\to+0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$ называется <u>несобственным интегралом от разрывной функции или несобственным интегралом 2 рода,</u> то есть $\int_a^b f(x)dx = \lim\limits_{\varepsilon\to\infty} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx.$

Если этот предел существует и конечен, несобственный интеграл называется сходящимся, если же предел бесконечен или не существует - расходящимся.

Аналогично определяются несобственные интегралы с разрывом подынтегральной функции при $x = a$: $\int_a^b f(x)dx = \lim\limits_{\varepsilon\to\infty} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx$

и во внутренней точке $\int_a^b f(x)dx = \lim\limits_{\varepsilon_1\to\infty} \int_a^{c-\varepsilon_1} f(x)dx + \lim\limits_{\varepsilon_2\to\infty} \int_{c+\varepsilon_2}^b f(x)dx.$

Этот интеграл сходится, если существуют и конечны оба предела.

Приведем примеры исследования несобственных интегралов на аходимоотть при помощи определения.

Пример 18. Вычислить несобственный интеграл $\int_1^5 \frac{dx}{\sqrt{25-x^2}}$ или доказать его расходимость.

Решение. Подынтегральная функция имеет разрыв при X = 5, поэтому по определению $\int_1^5 \frac{dx}{\sqrt{25-x^2}} = \lim\limits_{\varepsilon\to+0} \int_1^{5-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{25-x^2}} = \lim\limits_{\varepsilon\to+0} \arcsin\frac{x}{5}\Big|_1^{5-\varepsilon} = \lim\limits_{\varepsilon\to+0} \arcsin\frac{5-\varepsilon}{5} - \arcsin\frac{1}{5} = \arcsin 1 - \arcsin\frac{1}{5} = \frac{\pi}{2} - \arcsin\frac{1}{5}$, то есть интеграл сходится и равен $\frac{\pi}{2} - \arcsin\frac{1}{5}$.

Пример 18. Вычислить несобственный интеграл $\int_2^5 \frac{dx}{(x-3)^3}$ или доказать его расходимость.

Решение. Подынтегральная функция не определена при x=3, поэтому $\int_2^5 \frac{dx}{(x-3)^2} = \lim\limits_{\varepsilon_1\to+0} \int_2^{3-\varepsilon_1} \frac{dx}{(x-3)^2} + \lim\limits_{\varepsilon_2\to+0} \int_{3+\varepsilon_2}^5 \frac{dx}{(x-3)^2} = \lim\limits_{\varepsilon_1\to+0} \left(-\frac{1}{2} * \frac{1}{x-3}\Big|_2^{3-\varepsilon_1}\right) + \lim\limits_{\varepsilon_2\to+0} (-\frac{1}{2} * \frac{1}{x-3} \int_{3+\varepsilon_2}^5 |) = \frac{1}{2} \lim\limits_{\varepsilon_1\to+0} \frac{1}{\varepsilon_1} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \lim\limits_{\varepsilon_2\to+0} \frac{1}{\varepsilon_2} = \frac{1}{2}\left(\lim\limits_{\varepsilon_1\to+0} \frac{1}{\varepsilon_1} + \lim\limits_{\varepsilon_2\to+0} \frac{1}{\varepsilon_2}\right) - \frac{3}{4}$ то есть интеграл расходится.

Сформулируем признаки сходимости несобственных интегралов от разрывной функции.

Теорема 7. Пусть на полуинтервале $[a, b)$ выполняются неравенства $0 \leq f(x) \leq g(x)$, а в точке x=b функции f(x) и g(x) либо имеют разрыв, либо не определены. Тогда:

1) Если интеграл $\int_a^b g(x)\,dx$ сходится, то интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ также сходится.
2) Если интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ расходится, то интеграл $\int_a^b g(x)\,dx$ также расходится.

Теорема 8. Пусть на полуинтервале $[a, b)$ выполнены следующие условия: $|f(x)| \leq g(x), g(x) \geq 0$, а функции f(x) и g(x) либо имеют разрыв, либо не определены при x=b. Тогда из сходимости интеграла $\int_a^b g(x)\,dx$ следует сходимость интеграла $\int_a^b f(x)\,dx$.

Определение. Пусть функция f(x) определена на $[a, b)$, а в точке b либо не определена, либо имеет разрыв. Тогда интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ называется абсолютно сходящимся, если $\int_a^b |f(x)|\,dx$ сходится, и условно сходящимся, если $\int_a^b |f(x)|\,dx$ расходится, а $\int_a^b f(x)\,dx$ сходится.

Теорема 9. Пусть на полуинтервале $[a, b)$ выполняются следующие условия: функции f(x) и g(x) неотрицательны, $g(x) \neq 0$ и $\lim\limits_{x\to b-0} \frac{f(x)}{g(x)} = k$.

Тогда:

1) Если $0 \leq k \leq +\infty$ и интеграл $\int_a^b g(x)\,dx$ сходится, то интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ также сходится.
2) Если $0 \leq k \leq +\infty$ и интеграл $\int_a^b g(x)\,dx$ расходится, то интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ также расходится.

В частности, если $f(x) \sim g(x)$ при $x \to b - 0$ (то есть $\lim\limits_{x\to b-0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$), то интегралы $\int_a^b f(x)\,dx$ и $\int_a^b g(x)\,dx$ сходятся или расходятся одновременно.

Замечание. В качестве интеграла сравнения часто берут интеграл $\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha}$, который сходится при $\alpha < 1$ и расходится при $\alpha > 1$.

Аналогичные теоремы можно сформулировать, когда функция имеет разрыв или не определена в точке x=a.

Пример 20. Исследовать на сходимость интеграл $\int_0^1 \frac{2x^2+e^x}{\sqrt{x}}$.

Решение. Подынтегральная функция имеет разрыв при x=0. Выберем в качестве функции сравнения функцию $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$. Имеем $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\frac{2x^2+e^x}{\sqrt{x}}}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \lim\limits_{x\to 0}(2x^2 + e^x) = 1$, но интеграл $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ сходится (см. замечание к теореме 9), поэтому исходный интеграл также сходится.

В заключение заметим, что если исследуемый интеграл содержит одновременно особенности I и П рода, то для исследования его на сходимость он представляется в виде суммы интегралов, каждый из которых имеет особенность только одного рода, например:

$$\int_{\mathrm{a}}^{+\infty} f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^{+\infty} f(x)dx\,, \mathrm{b} \in (\mathrm{a}, +\infty).$$

(предполагается, что подынтегральная функция непрерывна на интервале $(\mathrm{a}, +\infty)$. и имеет разрыв или не определена при x=a .Походный интеграл будет сходящимся, воли сходятся оба интеграла в правой части равенства и расходящимся, если расходится хотя бы один из них.

Раздел 4. Кратные интегралы

[1. (гл.8 ст.349-379)]
[3. №2002-2113(выборочно)]

Пусть вначале на прямоугольнике $\prod = \{a \le x \le b, c \le y \le d\}$ задана непрерывная функция двух переменных $f(x, y)$. Тогда она ограничена, т.е. $|f(x, y)| \le M$ для некоторого M>0 и всех точек $(x, y) \in \Pi$. Аналогично конструкции определенного интеграла от функции одной переменной по отрезку [a,b] (см. с. 33) рассмотрим интегральные суммы $S_{n,m} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i) \Delta x_i \Delta y_i$, где $a = x_0 < \cdots < x_n = b, c = y_0 < \cdots < y_m = d, \xi_i \in (x_{i-1}, x_i), \Delta x_i = x_i - x_{i-1}, i = 1, \ldots, n, \eta_j \in (y_{j-1}, y_j), \Delta y_i = y_j - y_{j-1}, j = 1, \ldots, m.$ Эти суммы отвечают разбиению П на n*m прямоугольника Π_{ij} с площадями $\Delta x_i \Delta y_i$ и длинами диагоналей («диаметрами») $\delta_{ij} = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta x_i)^2}$ (см. рис.21).

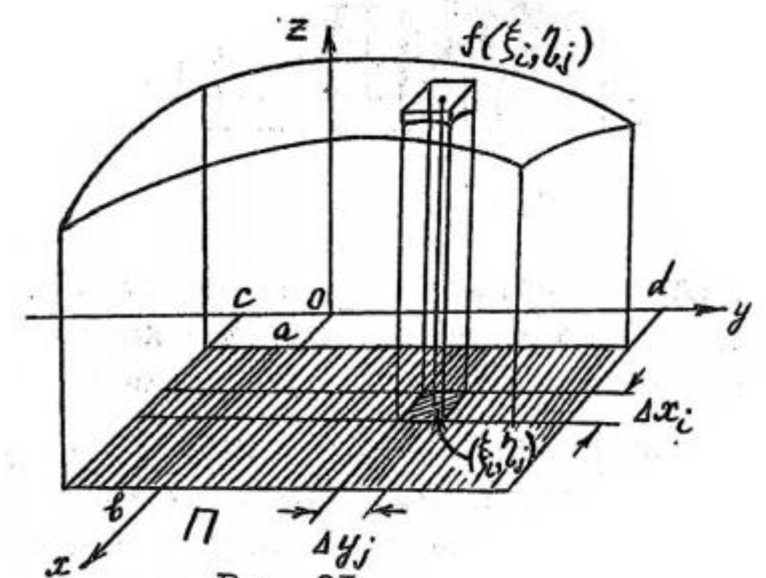


Рис. 21

Можно доказать, что при достаточно мелком разбиении все $S_{n,m}$ мало отличаются от одного и того же числа A; точнее говоря, для любого ε>0 найдётся $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что если для разбиения $\max_{i,j} \delta_{i,j} < \delta$, то при любом выборе точек $(\xi_i, \eta_i) \in \Pi_{ij}$

$$\left|S_{n,m} - A\right| < \varepsilon.$$

Такое число A называют интегралом (Римана) от функции f по множеству П и пишут $A = \iint_{\Pi} f(x, y) dxdy$.

Рис. 21 подсказывает, что если $f(x, y) \ge 0$,то для тела V, имеющего основание П , вертикальные боковые "стенки" и ограниченного сверху поверхностью $f(x, y)$ число A естественно интерпретировать как объем V (так как $S_{n,m}$ представляют объемы тел, составленных из параллелепипедов, которые аппроксимируют V).

Понятие интеграла Римана усложняется, если мы пожелаем интегрировать функцию (уже не обязательно непрерывную) по более общему множеству $\mathcal{D}$, чем прямоугольник П. Для этого требуется понятие площади множества. Площадь, называемую мерой Жордана, удается приписать множествам "хорошо аппроксимируемым» с помощью маленьких квадратов $V_{k,l}(q) = \{\frac{k}{10^q} \le x \le \frac{k+1}{10^q}, \frac{l}{10^q} \le y \le \frac{l+1}{10^q}\}$, площадь которых считается(как обычно) равной 10^{-2q}; здесь $q \ge 1, a\ k$ и l – целые числа. Обозначим $m_q(D)$ – сумму площадей тех $V_{k,l}(q)$, которые целиком держатся в D, а $\mathrm{M}_q(D)$ – сумму тех площадей $V_{k,l}(q)$б которые имеют непустое пересечение (т.е. общие точки) с D(рис.22).

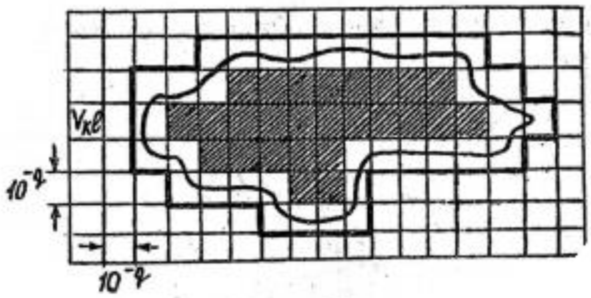


Рис. 22

Говорят, что D измеримо по Жордану и мера равна числу |D|, если $m_q(D) \to |D|$ и $\mathrm{M}_q(D) \to |D|$ при $q \to \infty$.

Точка принадлежит границе ∂D множества (из /R^n), если сколь угодно близко от нее можно найти как точку из D, так и точку, не входящую в D. Например, для "открытого" круга $D = \{(x, y): x^2 + y^2 < R^2\}$ и "замкнутого" круга $\overline{D} = \{(x, y): x^2 + y^2 \le R^2\}$ границей является окружность $\partial D = \{(x, y): x^2 + y^2 = R^2\} = \partial\overline{D}$.

Доказывается, что множество измеримо тогда и только тогда, когда мера его границы равна нулю. Наглядно можно представить, что линию, ограничивающую множество, для любого $\varepsilon > 0$ можно накрыть столь маленькими квадратами вида $V_{k,l}(q)$ (т.е. взяв достаточно большое q), что сумма их площадей будет меньше ε. Можно проверить, что всякая кривая на плоскости, являющаяся графиком непрерывной на отрезке функции, имеет площадь нуль. Это, а также то,, что множество, составленное из конечного числа непересекающихся (т.е. без общих точек) измеримых частей, имеет площадь, равную сумме площадей этих частей, дает широкий класс примеров множеств, измеримых по Жордану. Например, измеримо множество $D = \{a \le x \le b, c(x) \le y \le d(x)\}$, (1)

Если функции c(x) и d(x) непрерывны и $c(x) \le d(x)$ для всех $x \in [a, b]$. Тогда граница (рис.23) состоит из двух отрезков прямой и графиков двух непрерывных функций, следовательно $|\partial D| = 0$.

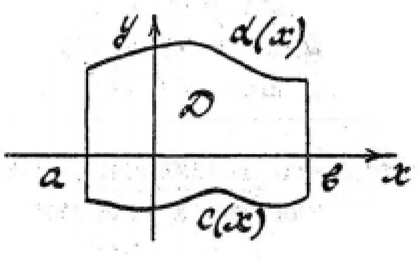


Рис. 23

Множеством вида (1) является круг $D = \{(x,y): (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 \leq R^2\}$, здесь $c(x) = y_0 - \sqrt{R^2-(x-x_0)^2}, d(x) = y_0 + \sqrt{R^2-(x-x_0)^2}$ при $x_0 - R \leq x \leq x_0 + R$.

К плоским множествам, измеримым по Жордану, относятся многоугольники, эллипсы и т.д.

Для функции $f(x,y)$, заданной на измеримом (а значит, ограниченном, т.е. содержащемся в некотором прямоугольнике) множестве D, интегральные суммы, отвечающие разбиению τ множества D (рис. 24) на непустые измеримые части

$D_1, \dots, D_p$, даются формулой $S_\tau = \sum_{i=1}^{p} f(\alpha_i, \beta_i)\,|D_i|$, где точки $(\alpha_i, \beta_i) \in D_i, i = 1, \dots, r$.

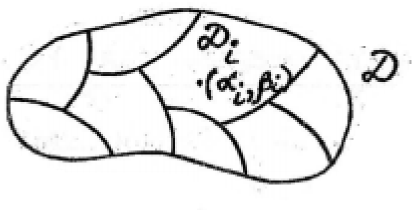


Рис. 24

Двойной интеграл $\iint_D \; f(x,y)dxdy$ определяется как предел (если таковой существует и один и тот же) для любой последовательности интегральных суш, отвечающих "измельчающимся разбиениям τ_n " множества D (и при любом выборе точек(α_i, β_i) из упоминавшихся частей). Это определение аналогично данному выше на "языке ε и δ " для случая D=П. "Мелкость" разбиения означает, что максимум размеров всех частей D_i меньше $\delta = \delta(\varepsilon)$, т.е. для любой пары точек из D_i; расстояние между ними меньше δ.

Данное определение кажется сложным, но, исходя из него, доказывается, что <u>если D имеет вид (1)</u> (и даже более общий, т.е D измеримо и содержит δD), <u>а функция $f(x,y)$ непрерывна на D, то интеграл от f по D существует</u>. Кроме того, это определение позволяет установить ряд важных свойств интеграла и получить <u>удобные приемы</u> отыскания значений интеграла.

Все сказанное выше почти дословно переносится на n-мерный случай, где возникает n-кратный интеграл по измеримому в смысле Жордана множеству V из $/R^n$: $\int \underset{V}{\dots} \int f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n$. (2)

При этом $\int \underset{V}{\dots} \int dx_1 \dots dx_n = |V|$, (3) где |V| обозначает меру Жордана множества V . Запись (3) означает, что под интегралом (2) стоит функция f=1 (тождественно равная единице). Далее вместо меры Жордана мы всюду будем говорить площадь, если Vc/R^2, и объем, если Vc/R^n, где $n \geq 3$.

Важным свойством интеграла является его <u>линейность</u>, т.е. если f и g интегрируемы на V, то для любых констант α и β функция αf+βg тоже интегрируема на V , причем $\int \underset{V}{\dots} \int (\alpha f(x_1, \dots, x_n) + \beta f(x_1, \dots, x_n)) dx_1 \dots dx_n = \alpha \int \underset{V}{\dots} \int f dx_1 \dots dx_n + \beta \int \underset{V}{\dots} \int f dx_1 \dots dx_n$

<u>Основной прием</u> нахождения n-кратных интегралов - это сведение их вычисления к повторному интегрированию, т.е. взятию n интегралов от функции <u>одной переменной</u>.

Мы сосредоточимся сейчас на вычислении интегралов в наиболее часто встречающемся случае, когда $f(x, y)$ непрерывна на множестве D вида (1) с непрерывными функциями c(x) и d(x) . Доказывается, что тогда при каждом $x \in [a, b]$ существует $\int_{c(x)}^{d(x)} f(x, y)\, dy$, являющийся непрерывной функцией от x на отрезке $[a, b]$, причём справедливо равенство $\iint_D f(x, y) dxdy = \int_a^b (\int_{c(x)}^{d(x)} f(x, y)\, dy\,)\, dx,$ (4) т.е. сперва вычисляется интеграл $\int_{c(x)}^{d(x)} f(x, y)\, dy$ и эта функция от x, затем интегрируется по отрезку [a,b]. Правую часть (4) обозначают также $\int_a^b dx \ \int_{c(x)}^{d(x)} f(x, y)\, dy$ и называют повторным интегралом.

Пример 1. Вычислить интеграл от функции $x^2 y$ по множеству D, заключенному для $-1 \leq x \leq 1$ между параболой $y = x^2$ и прямой $y = 1$.

Нарисуем на плоскости множество D (рис. 25).

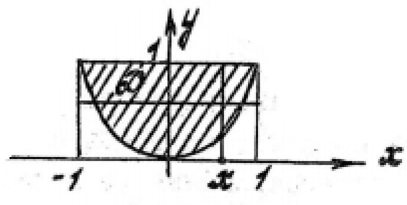


Рис. 25

Согласно (4), имеем $\iint_D x^2 y dxdy = \int_{-1}^{1} (\int_{x^2}^{1} x^2 y dy)\, dx = \int_{-1}^{1} x^2 \left(\int_{x^2}^{1} y dy\right) dx = \int_{-1}^{1} x^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{x^4}{2}\right) dx = \frac{1}{2}\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^7}{7}\right) |_{-1}^{1} = \frac{4}{21}.$

Формула, аналогичная (4), получается для множества Δ= $\{c \leq y \leq d, a(y) \leq x \leq b(y)\}$ (рис.26),

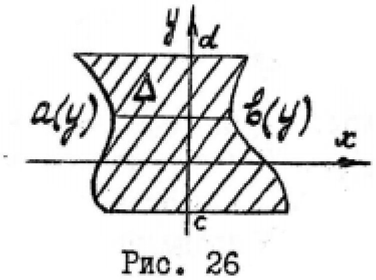


Рис. 26

Где непрерывные функции a(.) и b(.) таковы, что $a(y) \le b(y)$ для всех $y \in [c,d]$.

Для непрерывной $f(x,y)$ имеем $\iint_{\Delta} f(x,y)\,dxdy = \int_c^d \left(\int_{a(y)}^{b(y)} f(x,y)dx\right)dy$, (5)

Возвращаясь к примеру 1, видим, что при каждом фиксированном y переменная x изменяется в промежутке от $-\sqrt{y}$ до $\sqrt{y}$.

Получаем $\iint_D x^2ydxdy = \int_0^1 (\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} x^2ydx)\,dy = \int_0^1 y(\frac{x^3}{3}|_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}})\,dy = \frac{2}{3}\int_0^1 y^{\frac{5}{2}}\,dy = \frac{2}{3} * \frac{y^{\frac{7}{2}}}{\frac{7}{2}}|_0^1 = \frac{4}{21}$.

Свойство аддитивности интеграла (по области интегрирования) означает, что если $f(x_1,\dots,x_n)$ интегрируема на V, где V имеет площадь (объем при $n \ge 3$) и V разбивается на конечное число непересекающихся частей $V_1,\dots,V_m$, также имеющих площадь, то $\int \underset{V}{\dots} \int f(x)\,dx = \sum_{k=1}^m \int \underset{V_k}{\dots} \int f(x)\,dx$, (6) где использована часто применяемая сокращённая запись $x = (x_1,\dots,x_n), dx = dx_1,\dots,dx_n$.

Обратно, если f интегрируема на каждом из непересекающихся множеств $V_k, k = 1,\dots,m$ (имеющих площадь), то f интегрируема на множестве V , состоящем из этих частей, и верно (6).

Это свойство позволяет вычислять интегралы для областей интегрирования более сложного вида, чем фигурирующие в формулах (4) и (5). Полезный прием состоит в разложении V на непересекающиеся части рассмотренного выше типа (см. рис 23, 26). Такое разложение следует делать, учитывая, как будет проще вести дальнейшие вычисления, сводя к повторному интегрированию; сравните разбиения на рис. 27, 28.

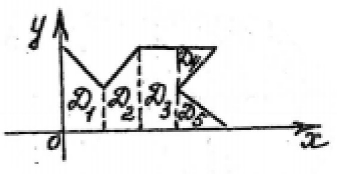


Рис. 27

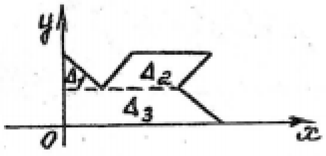


Рис. 28

Чтобы лучше освоиться с возможностью интегрировать в разном порядке (сперва по x или сперва по y), желательно потренироваться в расстановке пределов интегрирования (и в перестановке этих пределов в другом порядке).

Пример 2. Пусть область интегрирования D задана условиями $\frac{y}{4} \le x \le 2y$ при $0 \le y \le \frac{1}{2}$ и $\frac{y}{4} \le x \le 1$ при $\frac{1}{2} \le y \le 4$.

Двойной интеграл от непрерывной на D функции f требуется записать как повторный.

Изобразив D (рис.29), убеждаемся, что $D = \{0 \le x \le 1, \frac{x}{2} \le y \le 4x\}$

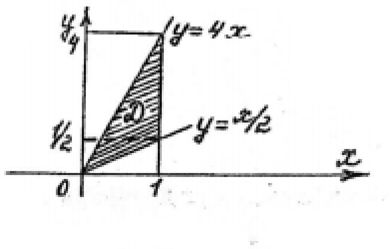


Рис. 29

И, следовательно $\iint_D f(x,y)dxdy = \int_0^1 dx \int_{\frac{x}{2}}^{4x} f(x,y)\,dy$.

Если в $/R^3$ задано тело $V = \{(x,y,z): g(x,y) \le z \le f(x,y)\}$ для $(x,y) \in D$, где D – множество, имеющее площадь, а $g(x,y)$ и $f(x,y)$ – непрерывные на D функции, причём $g(x,y) \le f(x,y)$ для всех $(x,y) \in D$, то для непрерывной функции h формула повторного интегрирования приобретает вид:

$$\iiint\limits_V h(x,y,z)dxdydz = \iint\limits_D (\int_{g(x,y)}^{f(x,y)} h(x,y,z)dz)\,dxdy$$

Выбирая $h(x,y,z) \equiv 1$ и $g(x,y) \equiv 0$ для всех $(x,y,z) \in V$, учитывая (3), получим следующую формулу для объёма V: $|V| = \iint_D f(x,y)dxdy$ (8)

Эту формулу мы уже обсуждали, когда D являлось прямоугольником. Заметим также, что левая часть формулы (7) допускает интерпретацию массы тела V, имеющего плотность $h(x,y,z)$.

Пусть V - ограниченное тело в $/R^3$, пусть $s \le z \le t$для всех $(x,y,z) \in V$. Обозначим для каждой точки z через V_zсечение V плоскостью, параллельной координатной плоскости (x, y), т.е. $V_z = \{(x,y): (x,y,z) \in V\}$.Тогда (в предположении, что h-непрерывная функция и все рассматриваемые интегралы существуют) справедлива формула (сравните с (7)):

$$\iiint\limits_V h(x,y,z)dxdydz = \int_s^t dz \iint\limits_{V_z} h(x,y,z)dxdy$$

В частности, $|V| = \int_s^t |V_z|dz$, (9) где $|V_z|$ - площадь сечения V_z.

Пример 3. Найти объём части конуса, задаваемой условиями: $0 \le z \le t$
$z^2 \ge c(x^2 - y^2)$, где с>0.

При каждом $z \ge 0$ сечение V_z представляет собой круг радиуса $\frac{z}{\sqrt{c}}$. Поэтому $|V_z| = \frac{\pi z^2}{c}$. Согласно (9), находим $|V_z| = \int_0^t \frac{\pi z^2}{c}\,dz = \frac{\pi t^3}{3c}$.

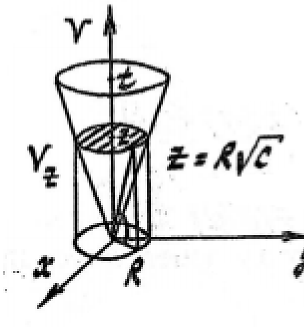


Рис. 30

Во многих задачах от исходных переменных бывает удобно перейти к новым. Вопрос о замене переменных в кратном интеграле является значительно более сложным, чем аналогичный вопрос в одномерном случае. Важную роль при, замене $x_i = x_i(u_1, \dots, u_n), i = 1, \dots, n$ (где $(u_1, \dots, u_n) \in \tilde{V}$) , описываемой дифференцируемыми функциями, играет определитель Якоби (якобиан)

$$I(u_1, \dots, u_n) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u_1} \dots & \frac{\partial x_1}{\partial u_n} \\ \frac{\partial x_n}{\partial u_1} \dots & \frac{\partial x_n}{\partial u_n} \end{vmatrix}$$

При выполнении ряда условий на функции $x_i(u_1, \dots, u_n), i = 1, \dots, n$ (взаимно однозначно отображающие $\tilde{V}$ на V), на якобиан $I(u_1, \dots, u_n)$ и на множества V, $\tilde{V}$ справедлива следующая формула: $\int \underset{V}{\dots} \int f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n = \int \underset{\tilde{V}}{\dots} \int (f(x_1(u_1, \dots, u_n), \dots, x_n(u_1, \dots, u_n)) | I(u_1, \dots, u_n) du_1 \dots du_n$ (10)

На плоскости часто используется переход от декартовых координат (x,y) к полярным координатам (r,φ), см.рис.1 $x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi$ $(0 \le r \le \infty, -\pi \le \varphi \le \pi)$.

При такой замене $I(r, \varphi) = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = r$ (11)

Если D имеет вид, изображённый на рис.31, то $\tilde{D} = \{(r, \varphi): -\pi < \alpha \le \varphi \le \beta \le \pi, 0 < H(\varphi) \le r \le R(\varphi)\}$, см. рис.32.

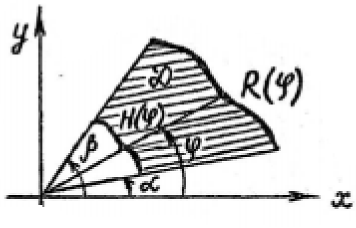


Рис. 31

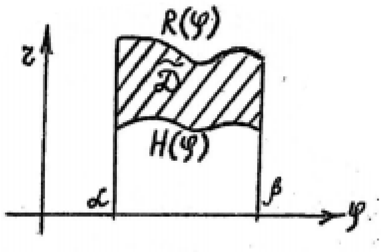


Рис. 32

Пример 4. Вычислить объём тела, ограниченного поверхностями $z = y^2, x^2 + y^2 = 4$ и $z = 0$.

Искомое тело ограничено поверхностью параболического цилиндра $z = y^2$, кругового цилиндра $x^2 + y^2 = 4$ и плоскостью $z = 0$ (рис.33).

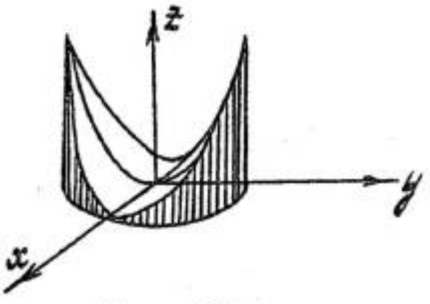


Рис. 33

Согласно (8), где $D=\{x^2+y^2\le 4\}$, т.е. круг радиуса 2 с центром в точке (0,0), имеем $|V|=\iint_D\ y^2dxdy$.

В полярных координатах множество $\widetilde{D}$, отвечающее кругу D, является прямоугольником $\widetilde{D}=\{-\pi\le\varphi\le\pi, 0\le r\le 2\}$, поэтому в силу (10) и (11)

$|V|=\iint_{\widetilde{D}}\ r^2\sin^2\varphi * rdrd\varphi=\int_{-\pi}^{\pi}d\varphi\int_0^2 r^3\sin^2\varphi\,dr=\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2\varphi\,d\varphi\int_0^2 r^3dr=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{(1-\cos 2\varphi)}{2}d\varphi*\frac{r^4}{4}|_{-\pi}^{\pi}=2\int_{-\pi}^{\pi}(1-\cos 2\varphi)d\varphi=4\pi-\sin 2\varphi\,|_{-\pi}^{\pi}=4\pi$.

Обратим внимание, что мы формально использовали равенство (10), в то время как для придания нашим выкладкам строгого характера требуются дополнительные рассуждения.

Раздел 5.Дифференциальные уравнения

[1,гл. 11, стр. 506-516] ; [2, гл. 2, стр. 46-90]; [3,№ 2742-3038(выборочно)].

I.Основные понятия (порядок уравнения, общее и частное решения).

Определение 1.2. Дифференциальным уравнением называется уравнение, связывающее независимую переменную **X**, искомую функцию $\boldsymbol{y=y(x)}$ и ее производные $\boldsymbol{y', y''}, \dots, \boldsymbol{y^{(n)}}$.
Уравнение имеет вид

$$\boldsymbol{F\left(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}\right)=0}$$

или

$$\boldsymbol{y^{(n)}=f\left(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}\right)}.$$

Определение 1.2. Порядком дифференциального уравнения называется порядок наивысшей производной, входящей в уравнение.

Так, например, уравнение $\boldsymbol{y''-5y'+6=0}$ есть уравнение второго порядка.

Определение 1.3. Решением или интегралом дифференциального уравнения называется функция $\mathbf{y=y(x)}$, которая при подстановке в уравнение обращает его в тождество.

Определение 1.4. Общим решением дифференциального уравнения первого порядка $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ называется функция $y = \varphi(x, C)$, которая зависит от одной произвольной постоянной С и удовлетворяет условиям:

1)эта функция удовлетворяет дифференциальному уравнению $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ при любом значении постоянной С;

2)каково бы ни было начальное условие $y = y_0$ при $X = X_0$ (или $y(x_0) = y_0$), можно найти такое значение $C = C_0$, что функция $y = \varphi(x, C_0)$ удовлетворяет данному начальному условию.

Функция $y = \varphi(x, C_0)$ называется частным решением, удовлетворяющим данному начальному условию.

Равенство вида $\phi(x, y, C) = 0$, неявно задающее общее решение, называется общим интегралом дифференциального уравнения.

Изучая дифференциальные уравнения, нужно усвоить разницу между общим и частным решениями дифференциального уравнения и уметь находить частное решение по заданным начальным условиям (задача Коши).

Число начальных условий для решения задачи Коши должно быть равно порядку **n** уравнения. Так, например, при **n = 2** задают

$$\left. y \right|_{x = x_0} = y_0, \quad \left. y' \right|_{x = x_0} = y'_0$$

Для уравнения n-го порядка задаются значения функции и её последовательных $n - 1$ производных в определенной точке $x = x_0$.

2. Дифференциальные уравнения первого порядка (с разделяющимися переменными, однородные, линейные, уравнения Бернулли).

Необходимо уметь по виду дифференциального уравнения определять, к какому типу дифференциальных уравнений оно относится. Определив тип уравнения, следует применить методы интегрирования, относящиеся именно в этому типу.

Так, в наиболее простых случаях переменные разделяются сразу (пример 1.1).

Пример 1.1. Цепь с сопротивлением r и индуктивностью L внезапно замыкается накоротко. Найти закон изменения тока $i(t)$ в катушке, если до замыкания по цепи протекал постоянный ток I_0**.**

Решение. Дифференциальное уравнение течения тока получим, применив закон Кирхгофа:

$$L\frac{di}{dt} + ir = 0.$$

Здесь независимой переменной является время t, а функцией - ток $i(t)$.
Уравнение допускает разделение переменных

$$\frac{di}{i} = -\frac{r}{L}dt$$

Интегрируя, получим $Ln\, i = Ln\, C - \frac{r}{L}\, t.$

Здесь произвольную постоянную удобнее взять в виде $Ln\, C$, а не C, так как в этом случае после потенцирования ответ будет получен в более компактной форме.

Итак,

$$Ln\,\frac{i}{C} = -\frac{r}{L}\cdot t,$$

отсюда

$$i = C\cdot e^{-\frac{r}{L}t}.$$

Найденное решение $i = Ce^{-\frac{r}{L}t}$ является общим решением заданного дифференциального уравнения.

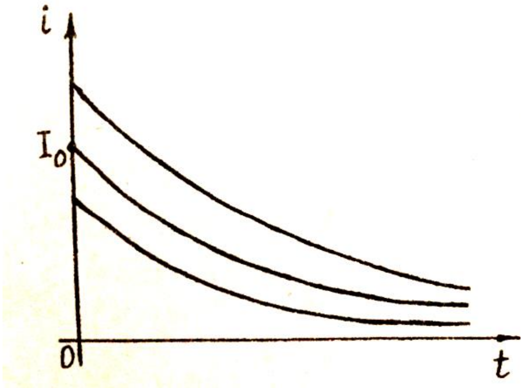


Рис. 1.1

Оно содержит произвольную постоянную С.

Геометрически общее решение изображается семейством кривых, зависящих от одного параметра С (рис. 1.1).

Для определения С воспользуемся начальным условием, которое можно записать в виде:

$$i\,\Big|\;\; = I_0\theta$$

Полагая в найденном общем решении $t = 0$, получим $C = I_0$,и следовательно, искомая зависимость тока от времени

$$i = I_0\cdot e^{-\frac{r}{L}t}.$$

Решение $i = I_0\cdot e^{-\frac{r}{L}t}$ является частным решением, удовлетворяющим заданному начальному условию $i = I_0$ при $t = 0$.

Геометрически частное решение изображается фиксированной интегральной кривой, выделенной из семейства интегральных кривых, проходящей через заданную точку плоскости, положение которой определяется начальным условием (см.рис. 1.1).

Определение 1.5. Функция $f(x, y)$ называется однородной функцией -го измерения относительно переменных X и $У$, если при любых λ справедливо тождество

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x, y)$$

Пример 1.2. Функция $\boldsymbol{f(x,y)} = \frac{x^2-y^2}{xy}$ есть однородная функция нулевого измерения, так как

$$\frac{(\lambda x)^2-(\lambda y)^2}{(\lambda x)(\lambda y)} = \frac{x^2-y^2}{xy}$$

Определение 1.6. Уравнение первого порядка $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$ называется однородным относительно X и У, если функция $f(x,y)$ есть однородная функция нулевого измерения относительно X и У.

Если дифференциальное уравнение первого порядка записано через дифференциалы

$$P(x;y)dx + Q(x;y)dy = 0,$$

то оно называется однородным, если $P(x;y)$ и $Q(x;y)$ – однородные функции одинакового измерения. Это уравнение может быть приведено к виду $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$. Для решения однородного дифференциального уравнения применяется подстановка $v = \frac{y}{x}$ или $y = v \cdot x$, где v - функция от х, подлежащая определению.

Пример 1.3. Найти общее решение (или общий интеграл) дифференциального уравнения :

$$(x^2+y^2)dx - xydy = 0$$

Решение. Решаем уравнение относительно $\frac{dy}{dx}$:

$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2-y^2}{xy}$ – однородное уравнение первого порядка.

Применим подстановку $y = v \cdot x$:

$\frac{dy}{dx} = \frac{dv}{dx} \cdot x + v$; $\quad \frac{dv}{dx} \cdot x + v = \frac{x^2+v^2x^2}{x^2v}$;

$\frac{dv}{dx} \cdot x = \frac{1+v^2}{v} - v;\quad x\frac{dv}{dx} = \frac{1}{v};\ vdv = \frac{dx}{x}.$

Интегрируя обе части, получим:

$$\frac{v^2}{2} = Ln\,|x| + C,\ \ v^2 = \frac{y^2}{x^2}.$$

Отсюда общий интеграл данного дифференциального уравнения :

$$\frac{y^2}{2x^2} = Ln\,|x| + C \qquad \text{или} \qquad y^2 = x^2\,Ln\,x^2 + Cx^2.$$

Определение 1.7. Дифференциальное уравнение вида

$$y' + P(x)y = Q(x)$$

($Q(x)$ и $P(x)$ непрерывные функции) является линейным уравнением первого порядка.

При решении линейного дифференциального уравнения следует воспользоваться подставкой $\boldsymbol{y = u \cdot v}$**,** где $\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{v}$ – функции, подлежащие определению. Одну из этих функций выбирают так, чтобы уравнение упростилось.

Пример 1.4. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$\boldsymbol{y' + \frac{2y}{x} = x^3.} \tag{1.1}$$

Решение. Это линейное дифференциальное уравнение, где

$$\boldsymbol{P(x) = \frac{2}{x};\ Q(x) = x^3.}$$

Применяем подстановку $\boldsymbol{y = u \cdot v}$

Тогда $\boldsymbol{y' = u'v + v'u}$**,** и уравнение примет вид :

$$\boldsymbol{u'v + v'u + \frac{2uv}{x} = x^3.}$$

Третий член в левой части уравнения группируем с одним из двух первых членов, вынося общий множитель за скобку :

$$\boldsymbol{v\left(u' + \frac{2u}{x}\right) + v'u = x^3.} \tag{1.2}$$

Выберем функцию u(x) такой, чтобы $\boldsymbol{u' + \frac{2u}{x} = 0}$**,** т.е.

$$\boldsymbol{\frac{du}{dx} = -\frac{2u}{x}} \qquad \text{и} \qquad \boldsymbol{\frac{du}{u} = -\frac{2dx}{x}.}$$

Интегрируя последнее уравнение, получим :

$$\boldsymbol{Ln\,|u| = -2\,Ln\,|x| + C_1.}$$

Так как достаточно выбрать какую-нибудь одну функцию $\boldsymbol{u}$**,** положим $\boldsymbol{C_1 = 0}$.

Следовательно,

$$\boldsymbol{Ln\,|u| = -2\,Ln\,|x|,} \qquad \text{т.е}\ \ \boldsymbol{u = x^{-2}.}$$

Подставим найденное значение $\boldsymbol{u(x)}$ в уравнение (1.2) :

$$\boldsymbol{\frac{dv}{dx}\cdot\frac{1}{x^2} = x^3}\ ;\quad \boldsymbol{v = \int x^5 dx - \frac{x^6}{6} + C.}$$

Итак,

$$\boldsymbol{y = u \cdot v = \frac{1}{x^2}\left(\frac{x^6}{6} + C\right).}$$

Общее решение уравнения (1.1) имеет вид :

$$\boldsymbol{y = \frac{1}{6}x^4 + \frac{C}{x^2}}.$$

3. Дифференциальные уравнения высших порядков

Дифференциальное уравнение второго порядка имеет вид

$$\boldsymbol{F(x; y; y'; y'') = 0}\ .$$

Случай непосредственного интегрирования

Уравнение имеет вид : $\boldsymbol{y^{(n)} = f(x)}$.

По определению производной *n*-го порядка

$$\boldsymbol{y^{(n)} = (y^{(n-1)})' = \frac{dy^{(n-1)}}{dx}}.$$

Уравнение перепишем в виде

$$\boldsymbol{dy^{(n-1)} = f(x)\, dx},$$

после интегрирования получим

$$\boldsymbol{y^{(n-1)} = F(x) + C_1}.$$

Порядок уравнения понизился. Интегрируя $\boldsymbol{n}$ раз, находим общее решение.

Общее решение такого уравнения содержит $\boldsymbol{n}$ произвольных постоянных $\boldsymbol{C_1, C_2, \ldots C_n}$.

Случаи понижения порядка

Уравнение $\boldsymbol{F(x; y'; y'') = 0}$ явно не содержит **у** . Полагая $\boldsymbol{y' = p = p(x)}$ и $\boldsymbol{y'' = \frac{dp}{dx}}$, получим уравнение первого порядка относительно $\boldsymbol{p(x)}$.

Уравнение $\boldsymbol{F(y; y'; y'') = 0}$ явно не содержит х. Считаем, что $\boldsymbol{y' = \frac{dy}{dx} = p = p(y)}$, тогда

$$\boldsymbol{y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p\frac{dp}{dy}}\ .$$

Подставляя y' и y'' в исходное уравнение, получаем уравнение первого порядка относительно $p(y)$.

4.Линейные однородные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Имеем линейное однородное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами p и q :

$$y'' + py' + qy = 0.$$

1. Если корни характеристического уравнения $k^2 + pk + q = 0$

действительные и различные ($k_1 \neq k_2$), то общее решение имеет вид

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x} ,$$

где C_1 и C_2 – постоянные.

2. Если корни характеристического уравнения комплексные $(k_1 = \alpha + i\beta, k_2 = \alpha - i\beta)$, то решение имеет вид

$$y = e^{\alpha x}(C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x).$$

3. Если корни характеристического уравнения действительные и равные $(k_1 = k_2)$, то решение имеет вид

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 x e^{k_2 x}.$$

5. Линейные неоднородные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Особое внимание следует уделить дифференциальным уравнениям второго порядка с постоянными коэффициентами с правой частью, которое имеет вид

$$y'' + py' + qy = f(x).$$

Эти уравнения имеют широкое применение в различных областях электротехники и механики. Общее решение такого уравнения может быть записано в виде

$$y = \overline{y} + y^*,$$

где $\overline{y}$ – общее решение однородного уравнения $y'' + py' + qy = 0;$

y^* – какое-нибудь частное решение неоднородного уравнения.

Для специальных видов правой части $\boldsymbol{f(x)}$ уравнения

$\boldsymbol{y'' + py' + qy = f(x)}$ ($\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{q}$ – постоянные числа) можно применить метод неопределенных коэффициентов. Если правая часть содержит многочлены, показательные функции, синусы, косинусы или их комбинации, то по способу неопределенных коэффициентов можно найти частное решение неоднородного уравнения.

В табл. 1.1. в графе 1 указан вид правой части $\boldsymbol{f(x)}$, а в графе 2 – соответствующие выражения для частного решения.

Таблица 1.1

<table>
<tr><th>$\boldsymbol{f(x)}$</th><th>Частное решение $\boldsymbol{y^*}$ уравнения
$\boldsymbol{y'' + py' + qy = f(x)}$</th></tr>
<tr><td rowspan="3">1. $e^{\alpha x}P_n(x)$,
где $\boldsymbol{P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} +}$ $\boldsymbol{+ \cdots + a_n}$ – многочлен -й степени от x</td><td>А. $\boldsymbol{e^{\alpha x}Q_n(x)}$, если ни один из
корней характеристического уравнения не равен $\boldsymbol{\alpha}$.
Здесь $\boldsymbol{Q_n(x) = b_0x^n + b_1x^{n-1} + + \cdots + b_n}$ – многочлен
$\boldsymbol{n}$-й степени от $\boldsymbol{x}$.</td></tr>
<tr><td>Б. $\boldsymbol{e^{\alpha x}x \cdot Q_n(x)}$, если один из
корней характеристического уравнения равен $\boldsymbol{\alpha}$.</td></tr>
<tr><td>В. $\boldsymbol{e^{\alpha x}x^2 \cdot Q_n(x)}$, если оба корня характеристического уравнения равен $\boldsymbol{\alpha \pm i\beta}$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">2. $e^{\alpha x}[P_n(x)\cos\beta x +$
$+L_m(x)\sin\beta x]$.
где $\boldsymbol{P_n(x)}$ – многочлен
n-й степени;
$\boldsymbol{L_m(x)}$ – многочлен -й степени от x</td><td>А. $\boldsymbol{e^{\alpha x}[Q_r(x)\cos\beta x +}$
$\boldsymbol{+R_r(x)\sin\beta x]}$, если корни характеристического уравнения не равны $\boldsymbol{\alpha \pm i\beta}$.
Здесь $\boldsymbol{r}$ – наибольшее из чисел **m** и **n.**</td></tr>
<tr><td>Б. $\boldsymbol{e^{\alpha x}[Q_r(x)\cos\beta x +}$
$\boldsymbol{+R_r(x)\sin\beta x]}$, если корни характеристического уравнения равен $\boldsymbol{\alpha \pm i\beta}$.</td></tr>
</table>

Пример 1.5. Найти решение уравнения $\boldsymbol{y'' + 2y' = x + 1}$, удовлетворяющее начальным условиям у$(\mathbf{0}) \ = \ \mathbf{0}$; $\boldsymbol{y}'(\mathbf{0}) = \mathbf{1}$.

Решение. Заданное уравнение является линейным неоднородным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами. Характеристическое уравнение $\boldsymbol{r^2 + 2r = 0}$ имеет корни $\boldsymbol{r_1} = 0$ и $\boldsymbol{r_2} = -2$.

Правая часть уравнения $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ имеет вид $\boldsymbol{e^{\alpha x} P_n}(\boldsymbol{x})$**,** где $\boldsymbol{\alpha} \ = \ \mathbf{0}$; $\boldsymbol{P_n}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} + \mathbf{1}$ **–** многочлен первой степени.

Поэтому частное решение следует искать в виде

$$\boldsymbol{y^* = x(Ax + B)}, \textbf{т.е. } \boldsymbol{y^* = Ax^2 + Bx}.$$

Многочлен $(\boldsymbol{Ax + B})$ умножен на $\boldsymbol{x}$**,** так как $\boldsymbol{\alpha} \ = \ \mathbf{0}$ совпадает с корнем $\boldsymbol{r_1} = 0$

Находим производные и подставляем в заданное уравнение :

$$\boldsymbol{y^{*\prime} = 2Ax + B}; \qquad \boldsymbol{y^{*\prime\prime} = 2A}; \qquad \boldsymbol{2A + 4Ax + 2B = x + 1}.$$

Приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях x :

$$\boldsymbol{4A = 1; 2A + 2B = 1; A = \frac{1}{4}; \ B = \frac{1}{4};} \quad \boldsymbol{y^* = \frac{1}{4}(x + 1)x}.$$

Так как общее решение соответствующего однородного уравнения есть $\boldsymbol{\bar{y} = C_1 + C_2 e^{-2x}}$**,**то общее решение исходного уравнения будет :

$$\boldsymbol{y = C_1 + C_2 e^{-2x} + \frac{1}{4}(x + 1)x}.$$

Найдем $\boldsymbol{C_1}$ и $\boldsymbol{C_2}$ по начальным условиям. Так как $\boldsymbol{y(0) = 0}$**,** то из общего решения уравнения имеем $\boldsymbol{C_1 + C_2 = 0}$ **.** Найдем производную от общего решения уравнения :

$$\boldsymbol{y' = -2C_2 e^{-2x} + \frac{x}{2} + \frac{1}{4}}$$

Тогда, используя второе начальное условие, получим : $\boldsymbol{1 = \ -2C_2 + \frac{1}{4}}$, откуда $\boldsymbol{C_2 = -\frac{3}{8} \cdot C_1}$ найдем из уравнения $\boldsymbol{C_1 + C_2 = 0}$.

Частное решение исходного уравнения, удовлетворяющее начальным условиям, имеет вид

$$\boldsymbol{y = \frac{3}{8}(1 - e^{-2x}) + \frac{1}{4}(x + 1)x}$$

Пример 1.6. Найти общее решение уравнения

$$y'' - 4y' + 3y = x\sin x.$$

Решение. Здесь $f(x) = x\sin x$, т.е. $\alpha = 0$; $P_n(x) = 0$; $L_m(x) = x$ – многочлен первой степени.

Характеристическое уравнение $r^2 - 4r + 3 = 0$ имеет корни $r_1 = 3$,

$r_2 = 1$.

Так как числа $\alpha \pm \beta i = 0 \pm i = \pm i$ не являются корнями характеристического уравнения, то частное решение ищем в форме (табл. 1.1, формула (2.А)) :

$$y^* = (Ax + B)\cos x + (Cx + D)\sin x.$$

Находим производные $y^{*\prime}, y^{*\prime\prime}$, подставляем их в исходное уравнение и, приравнивая коэффициенты при $\sin x$, $\cos x$, $x\sin x$, $x\cos x$, получаем систему уравнений

$$\begin{cases} -2A - D - 4C + 4B + 3D = 0, \\ 2C - B - 4A - 4D + 3B = 0, \\ -C + 4A + 3C = 1, \\ -A - 4C + 3A = 0, \end{cases}$$

откуда получаем

$$A = \frac{1}{5}\ ;\ B = \frac{11}{50};\ C = \frac{1}{10}; D = -\frac{1}{25}$$

Частное решение

$$y^* = \frac{1}{50}[(10x + 11)\cos x + (5x - 2)\sin x]$$

Общее решение исходного уравнения

$$y = C_1e^{3x} + C_2e^{x} + \frac{1}{50}[(10x + 11)\cos x + (5x - 2)\sin x].$$

В тех случаях, когда вид $f(x)$ не совпадает с формами, указанными в табл. 1.1., следует пользоваться методом вариации произвольных постоянных, который применим к любому линейному неоднородному уравнению независимо от вида правой части и позволяет найти общее решение такого уравнения в случае, когда известно общее решение соответствующего однородного уравнения.

Пример 1.7. Найти общее решение уравнения

$$y'' + y = \frac{1}{\cos x}.$$

Решение. Правая часть $\boldsymbol{f(x) = \frac{1}{\cos x}}$ не является частным случаем формул (2А) и (2Б) табл. 1.1. Применяем метод вариации произвольных постоянных. Находим общее решение соответствующего однородного уравнения $\boldsymbol{y'' + y = 0}$.
Характеристическое уравнение $\boldsymbol{r^2 + 1 = 0}$ имеет корни $\boldsymbol{r_1} = i, \boldsymbol{r_2} = -i$.

Общее решение $\boldsymbol{\overline{y} = C_1 \cos x + C_2 \sin x.}$

Значения $\boldsymbol{C_1(x)}$ и $\boldsymbol{C_2(x)}$ определяем из системы :

$$\begin{cases} \boldsymbol{C_1'(x) y_1 + C_2'(x) y_2 = 0}; \\ \boldsymbol{C_1'(x) y_1' + C_2'(x) y_2' = f(x)}, \end{cases}$$

в которую подставляем вместо $\boldsymbol{y_1}$ и $\boldsymbol{y_2}$ значения $\boldsymbol{y_1 = \cos x}$ *и* $\boldsymbol{y_2 = \sin x}$.

$$\begin{cases} \boldsymbol{C_1'(x) \cos x + C_2'(x) \sin x = 0}; \\ \boldsymbol{-C_1'(x) \sin x + C_2'(x) \cos x = \frac{1}{\cos x}}, \end{cases}$$

откуда $\boldsymbol{C_1'(x) = -tg\, x}$, $\boldsymbol{C_2'(x) = 1}$ и, следовательно,

$$\boldsymbol{C_1(x) = -\int tg\, x dx = Ln|\cos x| + C_1\, ;\ C_2(x) = x + C_2.}$$

Раздел 6. Операционное исчисление

[гл. 4, стр 123-149].

1.Преобразование Лапласа и его основные свойства

Операционное исчисление применяется в математике, механике, физике и других науках. Особое место занимает операционное исчисление при изучении переходных процессов в электротехнике, радиотехнике и импульсной технике.

Студент МТУСИ должен хорошо знать основные свойства преобразования Лапласа, теоремы операционного исчисления и уметь решать задачи, опираясь на эти знания.

Прежде всего необходимо усвоить основные определения.

Определение 2.1. Оригиналом называется функция $\boldsymbol{f(t)}$ действительного переменного $\boldsymbol{t}$**,** удовлетворяющая условиям :

а) $\boldsymbol{f(t)}$ **–** однозначная, непрерывная на всей оси $\boldsymbol{t}$ функция или кусочно-непрерывная (т.е. имеет конечное число трех разрыва первого рода на каждом конечном отрезке);

б) $\boldsymbol{f(t) = 0}$ при $\boldsymbol{t} < 0$;

в) существуют такие положительные числа $\boldsymbol{M}$ **и** $\boldsymbol{S_0}$, не зависящие от $\boldsymbol{t}$**,** что для всех $\boldsymbol{t}$ выполняем неравенство

$$|\boldsymbol{f(t)}| < \boldsymbol{M\, e^{S_0 t}} \qquad (2.1)$$

Функции – оригиналы растут при $\boldsymbol{t} \to \infty$ не быстрее, чем показательная функция $\boldsymbol{e^{S_0 t}}$ **(** в частности, для ограниченной функции : $\boldsymbol{S_0 = 0}$**).** Поэтому функции с разрывами второго рода (например, $\boldsymbol{f(t) = 1/t}$**,** $\boldsymbol{f(t) = tg\ t}$) или функции типа $\boldsymbol{f(t) = e^{t^2}}$ не являются оригиналами.

Определение 2.2. Изображением функции – оригинала $\boldsymbol{f(t)}$ называется функция $\boldsymbol{F(p)}$ комплексного переменного $\boldsymbol{p = S + i\sigma}$**,** определяемая интегралом

$$\boldsymbol{F(p) = \int_0^\infty e^{-pt} f(t)dt}. \qquad (2.2)$$

Операцию перехода от оригинала $\boldsymbol{f(t)}$ к изображению $\boldsymbol{F(p)}$ называют преобразованием Лапласа и символически обозначают $\boldsymbol{f(t) \to F(p)}$ или $\boldsymbol{f(t) \div F(p)}$.

Если функция $\boldsymbol{f(t)}$ является оригиналом, то интеграл Лапласа имеет конечную величину (т.е. сходится) при $\boldsymbol{S > S_0}$.

2.Изображение простейших оригиналов.

Таблица изображений.

Пример 2.1. Найти изображение единичной функции Хевисайда

$$g(t) = \begin{cases} I\ при\ t \geq 0, \\ 0\ при\ t < 0. \end{cases}$$

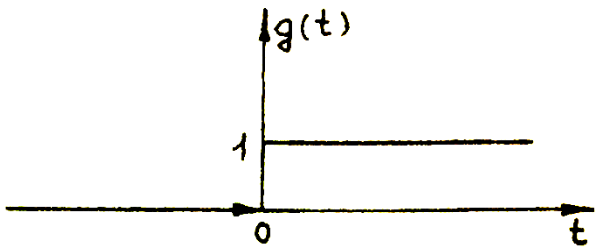


Рис. 2.1

Решение. По определению изображения имеем :

$$F(p) = \int_0^\infty e^{-pt} \cdot 1 \cdot dt = \lim_{b\to\infty} \int_0^b e^{-pt} dt = \lim_{b\to\infty} \left. \frac{e^{-pt}}{-p} \right|_0^b = \lim_{b\to\infty} \left(-\frac{1}{p} e^{-pb} + \frac{1}{p}\right) = \frac{1}{p},$$

если

В символической записи $g(t) \div \frac{1}{p}$.

В дальнейшем при записи функции-оригинала будем иметь в виду, что эта запись соответствует $t \geq 0$, а при $t < 0$ функция равна нулю.
Необходимо помнить следующие основные формулы соответствия операционного исчисления:

1) $1 \div \frac{1}{p}$;
2) $t \div \frac{1}{p^2}$;
3) $t^n \div \frac{n!}{p^{n+1}}$;
4) $e^{\alpha t} \div \frac{1}{p-\alpha}$;
5) $\sin \alpha t \div \frac{\alpha}{p^2+\alpha^2}$;
6) $\cos \alpha t \div \frac{p}{p^2+\alpha^2}$;
7) $sh \div \frac{\alpha}{p^2+\alpha^2}$;
8) $ch\, \alpha t \div \frac{p}{p^2+\alpha^2}$.

3. Основные теоремы операционного исчисления. Свойства преобразования Лапласа

Теорема линейности 2.1. Если $f_1(t) \div F_1(P), f_2(t) \div F_2(P)$, а C_1 и C_2 – любые постоянные числа, то

$$C_1 f_1(t) + C_2 f_2(t) \div C_1 F_1(P) + C_2 F_2(P).$$

Пример 2.2. Найти изображение функции

$$f(t) = 3\sin 5t - 4t^2 + 5.$$

Решение. Так как $3\, sin\, 5t \div \frac{5}{p^2+25}$, $t^2 \div \frac{2!}{p^3}$, $1 \div \frac{1}{p}$,
то $3\sin 5t - 4t^2 + 5 \div \frac{15}{p^2+25} - \frac{8}{p^3} - \frac{5}{p}$.

Теорема подобия 2.2. Если $f(t) \div F(p)$, а $\lambda = const$, то $f(\lambda t) \div \frac{1}{\lambda} F\left(\frac{p}{\lambda}\right)$.
Теорема смещения 2.3. Если $f(t) \div F(p)$, а $\lambda = const$, то $e^{-\lambda t} f(t) \div F(p+\lambda)$.
Пример 2.3. Найти изображение следующих функций
1. $f(t) = e^{-\lambda t} \sin \alpha t$
2. $f(t) = sh\, 5t\, \cos 3t$

Решение.
1. Так как $\sin \alpha t \div \frac{\alpha}{p^2+\alpha^2}$, то по теореме смещения

$$e^{-\lambda t} \sin \alpha t \div \frac{\alpha}{(p+\lambda)^2+\alpha^2}.$$

2. Так как $\cos 3t \div \frac{p}{p^2+9}$, а $sh\, 5t = \frac{e^{5t}-e^{-5t}}{2}$,

то $f(t) = sh\,5t\cdot\cos 3t = \frac{e^{5t}-e^{-5t}}{2}\cos 3t = \frac{1}{=2}(e^{5t}\cdot\cos 3t -$
$e^{-5t}\cdot\cos 3t) \div \frac{1}{2}\left[\frac{p-5}{(p-5)^2+9} - \frac{p+5}{(p+5)^2+9}\right]$

Пример 2.4. По изображению $F(p) = \frac{3p-1}{p^2-4p+7}$ найти оригинал.

Решение. Преобразуем данную дробь так, чтобы можно было применить теорему смещения :

$$\frac{3p-1}{p^2-4p+7} = \frac{3p-1}{(p-2)^2+3} = \frac{3(p-2+2)-1}{(p-2)^2+3} = \frac{3(p-2)+5}{(p-2)^2+3} = 3\cdot\frac{(p-2)}{(p-2)^2+(\sqrt{3})^2} =.$$

$$= 5\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{(p-2)^2+(\sqrt{3})^2} \div 3e^{2t}\,cos\left(\sqrt{3t}\right) + \frac{5}{\sqrt{3}}e^{2t}\,sin\sqrt{3t},$$

так как $\frac{p}{p^2+(\sqrt{3})^2} \div \cos(3t)\,;\ \frac{3}{p^2+(\sqrt{3})^2} \div sin\left(\sqrt{3t}\right)$.

Теорема запаздывания 2.4. Если $f(t) \div F(p)$ и $\boldsymbol{\tau}$ - положительное число, то $f(t-\tau) \div e^{-p\tau}\cdot F(p)$
где $f(t-\tau) = 0$ при $t-\tau < 0$, т.е $t < \tau$.
Пусть график функции $f(t)$ изображен на рис. 2.2, тогда график функции $f(t-\tau)$ будет сдвинут относительно графика $f(t)$ на τ (рис. 2.3).

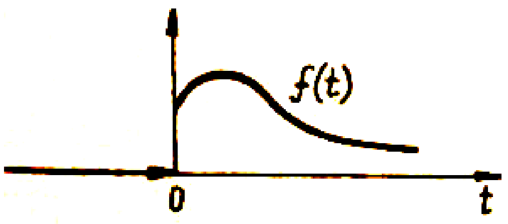


Рис. 2.2

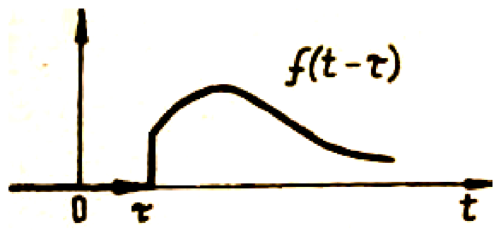


Рис. 2.3

Таким образом, процесс, описываемый функцией $f(t-\tau)$,
начинается как бы с опозданием на время τ относительно процесса, описываемого функцией $f(t)$.На этой теореме основано нахождение изображений многих функций, описывающих импульсные процессы.
График функции $g(t-\tau)$ изображен на рис. 2.4.

Так как $g(t) = 1 \div \frac{1}{}$,
то $g(t-\tau) = \frac{1}{p}e^{-\tau p}$

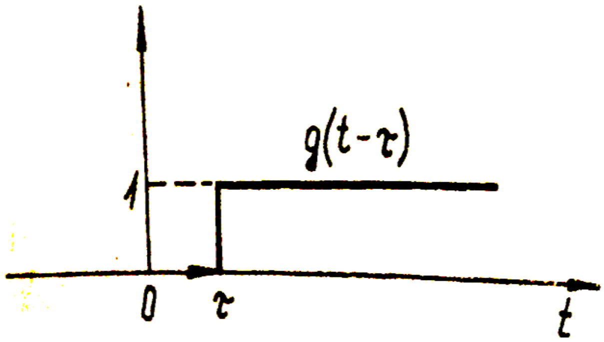


Рис. 2.4.

Пример 2.5. Найти изображение функции

$$=\begin{cases} 0 \text{ при } t<0; \\ t \text{ при } 0\le t\le 0; \\ 2 \text{ при } 2<t\le 4; \\ 0 \text{ при } t>4 \end{cases}$$

Построим график этой функции (рис. 2.5).

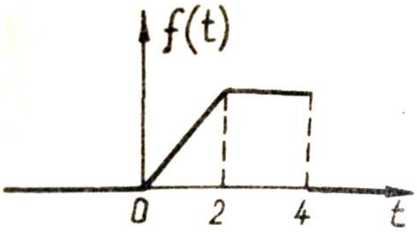


Рис. 2.5

Решение. Функцию запишем одним аналитическим выражением, используя единичную функцию.

Функция $f(t)$,равная (t) "включается" в момент $t=0$, а в момент $\tau=2$ она "гасится" и "включается" функция 2, которая "гасится" в момент $\tau=4$. Поэтому

$f_3(t)=t\cdot g(t)-t\cdot g(t-2)+2\cdot g(t-2)-2\cdot g(t-4)$.

Слагаемое $t\cdot g(t-2)$ надо представить в форме $\varphi(t-2)\cdot g(t-2)$

Сделаем это : $t\cdot g(t-2)=(t-2+2)\cdot g(t-2)=(t-2)\cdot g(t-2)+{+2}g(t-2)$.

Итак,

$$f_3(t)=t\cdot g(t)-(t-2)\cdot g(t-2)-2g(t-2)+2g(t-2)-2g(t-4)=$$

$$=t\cdot g(t)-(t-2)\cdot g(t-2)-2g(t-2)+2g(t-4)\div$$

$$\div\frac{1}{p^2}--\frac{1}{p^2}e^{-2p}-2\frac{1}{p}e^{-4p}$$

Пример 2.6. Найти оригинал по его изображению.

1. $e^{-\frac{p}{2}} \cdot \frac{p}{p^2+4}$

2. $e^{-3p} \cdot \frac{1}{(p+1)^2+3}$

Решение.

1.Так как $\frac{p}{p^2+4} \div \cos 2t$, то по теореме запаздывания

$$e^{-\frac{p}{2}} \cdot \frac{p}{p^2+4} = \cos 2\left(t - \frac{1}{2}\right)$$

Так как $\frac{1}{(p^2+3} \div \frac{1}{3}\sin(\sqrt{3}t)e^{-t}$, то по теореме смещения $\frac{1}{(p+1)^2+3} \div \frac{1}{3}\sin(\sqrt{3}t)e^{-t}$.

Теперь, применяя теорему запаздывания, получим

$$e^{-3p}\frac{1}{(p+1)^2+3} \div \frac{1}{\sqrt{3}}(t-3)e^{-(t-3)}$$

Изображение периодического сигнала

Теорема 2.5. Если оригинал $f(t)$ есть периодическая функция с периодом, равным T, то его изображение будет

$$F(p) = \frac{1}{1-e^{-TP}}\int_0^T e^{-pt} f(t)dt.$$

Пример 2.7. Найти изображение периодического с периодом T прямоугольного импульса $f(t)$ величины a и
продолжительности τ (рис. 2.6).

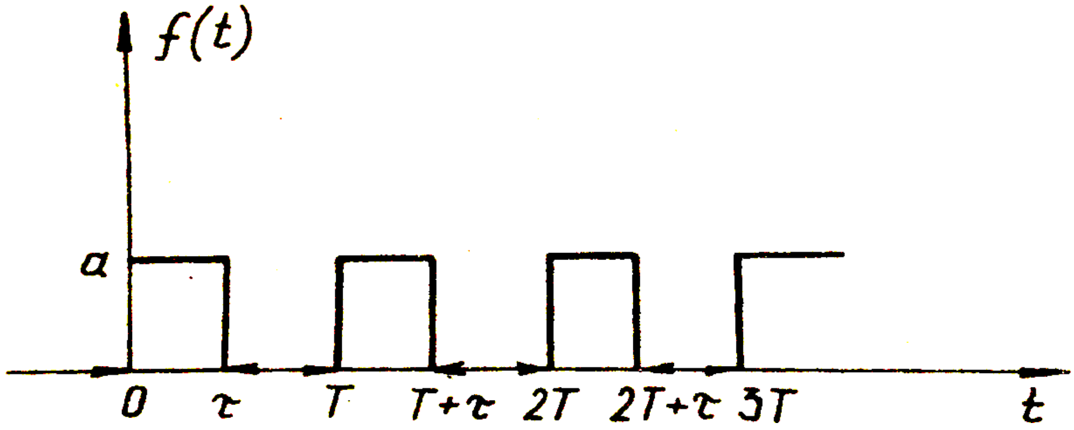


Рис. 2.6

Решение. Так как

$$f(t) = \begin{cases} a \text{ при } 0 \le t \le \tau; \\ 0 \text{ при } \tau < t < T, t \ < 0, \text{период } T, \end{cases}$$

то ее изображение

$$F(p) = \frac{1}{1 - e^{-TP}} \int_0^T a e^{-pt} = \frac{a}{1 - e^{-TP}} \cdot \frac{1}{p}(1 - e^{-p\tau}) = \frac{a}{p} \cdot \frac{1 - e^{-p\tau}}{1 - e^{-TP}}$$

Дифференцирование и интегрирование изображения

Теорема 2.6. Если $f(t) \div F(p)$, то $t^n \cdot f(t) \div (-1)^n \cdot F^{(n)}(P)$.

Пример 2.8. Найти изображение функции $t \cdot \cos \omega t$.

Решение. Так как

$$\cos \omega t = \frac{p}{p^2 + \omega^2},$$

то

$$t \cdot \cos \omega t \div -\left(\frac{p}{p^2 + \omega^2}\right)' = -\frac{\omega^2 - p^2}{(p^2 + \omega^2)^2} = \frac{p^2 - \omega^2}{(p^2 + \omega^2)^2}$$

Теорема 2.7. Если $\frac{f(t)}{t}$ является оригиналом и $f(t) \div F(p)$, то

$$\frac{f(t)}{t} \div \int_p^\infty F(з) dз.$$

Пример 2.9. Найти изображение оригинала $\frac{\sin t}{t}$.

Решение. Так как $\sin t \div \frac{1}{p^2+1}$, то

$$\frac{\sin t}{t} \div \int_p^\infty \frac{dз}{з^2+1} = \lim_{b\to\infty} \int_p^b \frac{dз}{з^2+1} = \lim_{b\to\infty} arctg\, з \Big|_p^b =$$

$$= \lim_{b\to\infty} (\ arctg\, b - arctg\, p) = \frac{\pi}{2} - arctg\, p.$$

Дифференцирование и интегрирование оригинала

Теорема 2.8. Если $f(t) \div F(p)$ и функции $f'(t), f''(t), \ldots\ldots, f^{(n)}(t)$ являются оригиналами, то

$$f'(t) \div pF(p) - f(0);$$

$$f''(t) \div p^2 F(p) - p \cdot f(0) - f'(0);$$

$$f'''(t) \div p^3 F(p) - p^2 \cdot f(0) - p \cdot f'(0) - f''(0);$$

………………………………………………………………….

$$f^{(n)}(t) \div p^n F(p) - p^{n-1} \cdot f(0) - p^{n-2} \cdot f'(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0)$$

При нулевых начальных условиях, т.е. при

$f(0)=f'(0)=\ldots=f^{(n-1)}(0)=0$, имеем
$f'(t) \div pF(p),\ f''(t) \div p^2F(p),\ \ldots,\ f^{(n)}(t) \div p^nF(p)$.

В этом случае n – кратное дифференцирование оригинала сводится к умножению на p^n его изображения.

Пример 2.10. Найти изображение дифференциального выражения

$$3x'''(t)-2x''(t)+5,$$

если $x(0)=-1;\ x'(0)=2;\ x''(0)=-3$.

Решение. Пусть $x(t) \div \overline{x}(p)$, тогда

$$x'(t) \div p\overline{x}(p)-x(0)=p\overline{x}(p)+1;$$
$$x''(t) \div p^2\overline{x}(p)+p-x'(0)=p^2\,\overline{x}(p)+p-2;$$
$$x'''(t) \div p^3\overline{x}(p)+p^2-2p-x''(0)=p^3\,\overline{x}(p)+p^2-2p+3.$$

Так как $5 \div 5\frac{1}{p}$, то окончательно имеем

$3x'''(t)-2x''(t)+5 \div (p^3\,\overline{x}(p)+p^2-2p+3)-2(p^2\,\overline{x}(p)+p-2)++5\frac{1}{p}=3p^3\,\overline{x}(p)+p^2\,\overline{x}(p)-8p+13+\frac{5}{p}$.

Теорема 2.9. Если функция $f(t)$ является оригиналом, причем $f(t) \div F(p)$, то $\int_0^t f(\tau)d\tau$ также является оригиналом и $\int_0^t f(\tau)d\tau \div F(p)/p$

Пример 2.11. Найти изображение интеграла $\int_0^t \frac{sh\,\tau}{\tau}d\tau$.

Решение. Найдем изображение функции $\frac{sh\,\tau}{\tau}$. Так как,

$sh\,t \div \frac{1}{p^2-1}$, то

$$\frac{sh\,\tau}{\tau} \div \int_p^\infty \frac{dз}{з^2-1}=\lim_{b\to\infty}\int_p^b \frac{dз}{з^2-1}=\lim_{b\to\infty}\left[\frac{1}{2}\,ln\frac{з-1}{з+1}\,\Big|_p^b\right]=$$
$$=\frac{1}{2}\lim_{b\to\infty}\left[ln\frac{b-1}{b+1}-ln\frac{p-1}{p+1}\right]=\frac{1}{2}\left[\lim_{b\to\infty}ln\frac{b-1}{b+1}-ln\frac{p-1}{p+1}\right]=$$
$$=\frac{1}{2}\left[ln\lim_{b\to\infty}\frac{b-1}{b+1}-ln\frac{p-1}{p+1}\right]=\frac{1}{2}\left[\ln 1-ln\frac{p-1}{p+1}\right]=-\frac{1}{2}\,ln\frac{p-1}{p+1}=\frac{1}{2}\,ln\frac{p-1}{p+1}$$

По теореме 2.9. (об интегрировании оригинала) имеем

$$\int_0^t \frac{sh\,\tau}{\tau}d\tau \div \frac{1}{2p}ln\frac{p-1}{p+1}$$

Теорема умножения изображений

Для формулировки теоремы умножения необходимо усвоить понятие свертки функций.

Определение 2.3. Сверткой двух функций $f_1(t)$ и $f_2(t)$ действительно переменного t называется интеграл

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_0^t f_1(\tau) \cdot f_2(t-\tau) d\tau$$

Знак * – символическое обозначение свертки.

Свертывание обладает свойством переместительности, т.е.

$$f_1(t) * f_2(t) = f_2(t) * f_1(t)$$

Можно доказать, что если функции $f_1(t)$ и $f_2(t)$ оригиналы, то их свертка есть также оригинал.

Пример 2.12. Найти свертку функций $f_1(t) = e^t$, $f_2(t) = e^{-t}$.

Решение. По определению свертки имеем :

$$e^t * e^{-t} = \int_0^t e^{\tau} \cdot e^{-(t-\tau)} d\tau = \int_0^t e^{2\tau} \cdot e^{-t} d\tau = e^{-t} \int_0^t e^{2\tau} \cdot d\tau =$$

$$= \frac{1}{2} e^{-t} \cdot e^{2\tau} \Big|_0^t = \frac{1}{2} e^{-t} (e^{2t} \cdot e^0) = \frac{1}{2} (e^t - e^{-t}) = sh\, t.$$

Теорема 2.10. об изображении свертки (теорема умножения изображений). Если $f_1(t) \div F_1(p)$ и $f_2(t) \div F_2(p)$,

то $F_1(p) \cdot F_2(p) \div f_1(t) * f_2(t)$

Пример 2.13. Найти оригинал по его изображению $\frac{\boldsymbol{p}}{(\boldsymbol{p}^2+\boldsymbol{\omega}^2)^2}$

Решение. Так как $\frac{\boldsymbol{p}}{(\boldsymbol{p}^2+\boldsymbol{\omega}^2)^2} = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{p}^2+\boldsymbol{\omega}^2} \cdot \frac{\boldsymbol{p}}{\boldsymbol{p}^2+\boldsymbol{\omega}^2}$ и

$$\frac{1}{p^2+\omega^2} \div \frac{1}{\omega} \sin \omega t, \frac{p}{p^2+\omega^2} \div \cos \omega t, \text{ то}$$

по теореме умножения

$$\frac{p}{(p^2+\omega^2)^2} \div \frac{1}{\omega} \sin \omega t * \cos \omega t = \frac{1}{\omega} \int_0^t \sin \omega\tau \cdot \cos \omega(t-\tau) d\tau =$$

$$= \frac{1}{2\omega} t \sin \omega t$$

4.Теорема разложения. Нахождение оригиналов по изображениям в виде рациональных дробей.

Пусть изображение $F(p) = \frac{A(P)}{B(P)}$ – рациональная функция, где $A(P)$ и $B(P)$ – многочлены , причем степень числителя меньше степени знаменателя и дробь $\frac{A(P)}{B(P)}$ несократима, а $p_1,\ p_2, \dots, p_n$ – простые корни (нули) знаменателя $B(P)$. Тогда соответствующий оригинал может быть найден по формуле

$$F(p) = \frac{A(P)}{B(P)} \div \sum_{k=1}^{n} \frac{A(P_k)}{B'(P_k)} e^{P_k t}.$$

Пример 2.14. Найти оригинал по его изображению

$$\frac{P^2+1}{P^4+6P^3+11P^2+P} = \frac{P}{P(P+1)(P+2)(P+3)}.$$

Решение. $A(P) = P^2 + 1;\ B(P) = P^4 + 6P^3 + 11P^2 + P.$
Корни знаменателя $B(P)$ $(P_1 = 0, P_2 = -1, P_3 = -2, P_4 = -3)$
Простые, поэтому можно использовать теорему разложения.

$$B'(P) = 4P^3 + 18P^2 + 22P + 6$$

	$A(P) = p^2 + 1$	$B'(P) = 4P^3 + 18P^2 + 22P + 6$
$P_1 = 0$	$A(0) = 1$	$B'(0) = 6$
$P_2 = -1$	$A(-1) = 2$	$B'(-1) = -2$
$P_3 = -2$	$A(-2) = 5$	$B'(-2) = 2$
$P_4 = -3$	$A(-3) = 10$	$B'(-3) = -6$

Итак, $\frac{P^2+1}{P(P+1)(P+2)(P+3)} \div \frac{1}{6}e^0 - e^{-t} + \frac{5}{2}e^{-2t} - \frac{5}{3}e^{-3t} =$

$$= \frac{1}{6}e^{-t} + \frac{5}{2}e^{-2t} - \frac{5}{3}e^{-3t}$$

Пример 2.15. Найти оригинал по его изображению

$$\frac{4p^2 - 6p + 4}{p(p-1)^2}$$

Решение. При определении оригинала по данному изображению можно использовать метод разложения на простейшие дроби. Этот метод применим и в случае кратных корней знаменателя, действительных или комплексных. Если дробь неправильная, то выделяют из нее правильную часть и применяют теорему о дифференцировании оригинала.

Данную дробь представим в виде суммы дробей :

$$\frac{4p^2 - 6p + 4}{p(p-1)^2} = \frac{A}{p} + \frac{B}{(p-1)^2} + \frac{C}{p-1},$$

Определим коэффициенты A , B , C :

$$4p^2 - 6p + 4 = A(p^2 - 2p + 1) + Bp + Cp^2 - Cp$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях p, получим $A = 4$, $B = 2$, $C = 0$, тогда данное изображение имеет оригинал

$$\frac{4p^2 - 6p + 4}{p(p-1)^2} = \frac{4}{p} + \frac{2}{(p-1)^2} \div\ 4 + 2t \cdot e^t$$

5.Операционный метод решения линейных.

дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

При помощи операционного исчисления можно найти частное решение линейного дифференциального уравнения вида

$$x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + a_2 x^{(n-2)} + \cdots + a_{n-1} x' + a_n x = f(t),$$

удовлетворяющее заданным начальным условиям

Метод решения заключается в следующем : неизвестная функция $x(t)$ и ее производные, а также $f(t)$ заменяются их изображениями. Из полученного таким образом алгебраического уравнения находят изображение искомой функции. По найденному изображению восстанавливают оригинал, т.е. решение заданного дифференциального уравнения.

Для нахождения оригинала по известному изображению следует использовать метод неопределенных коэффициентов или теорему разложения, основные правила и теоремы операционного исчисления.

Пример 2.16. Найти частное решение дифференциального уравнения $x'' + x' - 2x = e^{-t}$, удовлетворяющее начальным условиям $x(0) = 1$, $x'(0) = -2$.

Решение. Запишем данное уравнение в операторной форме : $x(t) \div X(p)$.Тогда $x'(t) \div pX(p) - 1$; $x''(t) \div p^2x(p) - p + 2$; $e^{-t} \div \frac{1}{p+1}$.

Подставляя эти выражения в исходное уравнение, получаем алгебраическое уравнение относительно изображения $X(p)$

$$p^2X(p) + pX(p) - 2X(p) = p^2/p + 1,$$

откуда $X(p) = \frac{p^2}{(p+1)(p^2+p-2)} = \frac{p^2}{(p+1)(p-1)(p+2)}$.

Для нахождения оригинала по заданному изображению используем метод неопределенных коэффициентов. Разложим полученную дробь на простейшие :

$$\frac{p^2}{(p+1)(p-1)(p+2)} = \frac{A}{(p+1)} + \frac{B}{(p-1)} + \frac{C}{(p+2)}$$

откуда $p^2 = A(p^2 + p - 2) + B(p^2 + 3p + 2) + C(p^2 - 1)$.

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях P, получим

$$A = -\frac{1}{2};\ B = \frac{1}{5};\ C = \frac{4}{3}.$$

Тогда

$$\frac{p^2}{(p+1)(p^2+p-2)} = -\frac{1}{2(p+1)} + \frac{1}{6(p-1)} + \frac{4}{3(p+2)} \div\ -\frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{6}e^{t} + \frac{4}{3}e^{-2t}$$

Ответ : $-\frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{6}e^{t} + \frac{4}{3}e^{-2t}$.

Вопросы для самопроверки

1. Дайте определение преобразования Лапласа. Что называется изображением и оригиналом?
2. Могут ли две различные непрерывные функции иметь одно и то же изображение?
3. Если $F(p) \div f_1(t)$ и $F_2(p) \div f_2(t)$, то какое изображение будет иметь $af_1(t) + bf_2(t)$ (a и b – постоянные) ? Докажите свойство линейности изображения.
4. Если $F(p) \div f(t)$, то какое изображение будет иметь $e^{-\alpha t} \cdot f(t)$? Докажите теорему смещения.
5. Если $F(p) \div f(t)$ ($f(t) = 0$ при $t \leq 0$), то какое изображение будет иметь $f(t - t_1)$, $t_1 > 0$? Докажите теорему запаздывания.

6. Если $F(p) \div f(t)$, то какое изображение иметь оригинал $f(at)$ $(a > 0)$? *Докажите* теорему подобия и найдите изображения функций $sin\, at$ и $cos\, at$, считая известными изображения функций $sin\, t$ и $cos\, t$ $(a > 0)$.

7. Докажите теорему о дифференцировании оригинала. Если $F(p) \div f(t)$, то какие изображения будут иметь $f'(t), f''(t), f'''(t)$? [$f'(t), f''(t), f'''(t)$ *существуют при всех* $t > 0$].

8. Если $F(p) \div f(t)$, то какое изображение иметь $\int_0^t f(\tau)d\tau$? Докажите теорему об интегрировании оригинала. С помощью этой теоремы найдите изображение функции $cos\, at$, считая известным изображение функции $sin\, at$.

9. Если $F(p) \div f(t)$, то какие оригиналы будут соответствовать $F'(p)$, $F''(p)$, $F'''(p)$? Докажите теорему о дифференцировании изображения. Найдите с помощью этой теоремы изображение функции $t^n e^{\alpha t}$, считая известное изображение функции $e^{\alpha t}$.

10. Если $F_1(p) \div f_1(t)$ и $F_2(p) \div f_2(t)$, то какое изображение будет иметь

$$\int_o^t f_1(\tau) \cdot f_2(t-\tau)\, \mathrm{d}\tau\ ?$$

Докажите теорему умножения.

11. Изложите операционный метод решения дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Приведите примеры.

Раздел 7. Числовые ряды.

[1, *гл.* 5, *стр* 214 – 228];[2, *гл.* 3, *стр* 91 – 106];
[№ 2416 – 2482(*выборочно*)].

1.Числовые ряды. Необходимое условие сходимости, основные свойства, действия с рядами.

Рассмотрим числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \cdots$$

Сумма первых n членов ряда

$$S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$$

называется -й частичной суммой ряда.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ называется сходящимся, если последовательность частичных

сумм S_n при $n \to \infty$ сходится к некоторой величине S, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$.

Если предел частичных сумм не существует, то ряд называется расходящимся.

Необходимый признак сходимости. Если числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится, то предел его общего члена при $n \to \infty$ равен нулю:

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0.$$

Обратное утверждение (если $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$, то ряд сходится), вообще говоря, неверно. Например,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0,$$

но соответствующий гармонический ряд

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}$$

расходится .С другой стороны, если $\boldsymbol{\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0}$, то ряд $\boldsymbol{\sum_{n=1}^{\infty} u_n}$ расходится. Например, ряд

$$\boldsymbol{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-3}{n+2}}$$

расходится поскольку

$$\boldsymbol{\lim_{n\to\infty} \frac{n-3}{n+2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1-\frac{3}{n}}{1+\frac{2}{n}} = 1 \neq 0}$$

2. Ряды с положительными членами. Признак сравнения, признаки Даламбера, интегральный признак Коши.

При исследовании знакоположительных рядов часто используется первый *признак сравнения*.

Пусть даны два знакоположительных ряда:

$$\boldsymbol{\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots,} \tag{3.1}$$

$$\boldsymbol{\sum_{n=1}^{\infty} v_n = v_1 + v_2 + \cdots + v_n + \cdots.} \tag{3.2}$$

Если ряд (3.1) сходится, и выполняются неравенства

$$\boldsymbol{v_n \leq u_n, \quad n = 1, 2, \ldots,}$$

то ряд (3.2) сходится.

Наоборот, если ряд (3.1) расходится, и выполняются неравенства

$$\boldsymbol{v_n \geq u_n, \quad n = 1, 2, \ldots,}$$

то ряд (3.2) расходится.

Для сравнения удобно использовать следующие «эталонные» ряды:

1)расходящийся гармонический ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n};$$

2) геометрическую прогрессию

$$\sum_{\boldsymbol{n=0}}^{\infty} \boldsymbol{a\, q^n}\ (\boldsymbol{a \neq 0}),$$

которая сходится при $|q| < 1$ расходится при $|q| \geq 1$:

3) ряд Дирихле

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\boldsymbol{n^p}},$$

который сходится при $\boldsymbol{p > 1}$ **и** расходится при $\boldsymbol{p \leq 1}$**.**

Пример 3.1. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n-2}$$

Решение. Так как $\frac{1}{n-2} > \frac{1}{n}$ при $n \geq 3$ и ряд $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n}$ расходится, то по первому признаку сравнения расходится и ряд

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n-2}$$

Пример 3.2. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\cos n\alpha|}{\boldsymbol{n^2+1}},$$

Решение. Так как $|\cos n\alpha| \leq 1$, то $\frac{|\cos n\alpha|}{\boldsymbol{n^2+1}} \leq \frac{1}{\boldsymbol{n^2+1}} < \frac{1}{\boldsymbol{n^2}}$

Поскольку ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\boldsymbol{n^2}}$ сходится как ряд Дирихле при $\boldsymbol{p = 2}$**,** то по первому признаку сравнения исходный ряд сходится.

Иногда удобно использовать *второй признак сравнения:*

если существует конечный и отличный от нуля предел,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=k,$$

то ряды $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ сходятся или расходятся одновременно.

Пример 3.3. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{3n^2-2}},$$

Решение. Сравниваем наш ряд с рядом

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^3}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3/2}},$$

Так как $u_n=\frac{1}{\sqrt{3n^2-2}}$, а $v_n=\frac{1}{\sqrt{n^3}}$, то

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^3}}{\sqrt{3n^3-2}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n^3}{3n^3-2}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{1}{3-\frac{2}{n^3}}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\neq 0.$$

Поскольку ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3/2}}$ сходится как ряд Дирихле при $p=\frac{3}{2}$, то по второму признаку сравнения сходится и исходный ряд.

Если общий член u_n есть дробно-рациональное выражение,

т.е : $u_n=\frac{a_m(n)}{b_p(n)}$,

где $a_m(n)-$ многочлен степени m;

$b_p(n)$ –многочлен степени p; $p>m$,

то в качестве «эталонного» ряда $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ нужно брать ряд

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^S}$, где $S=p-m.$

Пример 3.4. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n-2}{n^3-3n+7}.$$

Решение. Здесь $m = 1$, $p = 3$, $S = p - m = 3 - 1 = 2.$

Сравниваем наш ряд с рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

Так как $u_n = \frac{3n-2}{n^3-3n+7}$, а $v_n = \frac{1}{n^2}$, то

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(3n-2)n^2}{(n^3-3n+7)} = \lim_{n\to\infty} \frac{3n^3-n^2}{n^3-3n+7} = \lim_{n\to\infty} \frac{3-\frac{2}{n}}{1-\frac{3}{n^2}+\frac{7}{n^3}} = 3 \neq 0$$

Поскольку ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ сходится (как ряд Дирихле при $p = 2$), то по второму признаку сравнения сходится и исходный ряд. Если признаки сравнения использовать затруднительно, используют более сложные признаки: Даламбера, Коши, интегральный признак Коши.

Признак Даламбера. Пусть дан ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ с положительными членами. Пусть существует конечный предел

$$l = \lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$$

Тогда:

если $l < 1$, то ряд сходится;

если $l > 1$, то ряд расходится;

если $l = 1$, то ряд может сходиться, а может и расходиться.

Пример 3.5. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{3^n}$$

Решение. Очевидно, что

$$u_n = \frac{n+2}{3^n}, \quad u_{n+1} = \frac{n+3}{3^{n+1}}$$

Тогда

$$l = \lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+3)3^n}{3^{n+1}(n+2)} = \frac{1}{3} \lim_{n\to\infty} \frac{(n+3)}{(n+2)} = \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{1}{3}$$

Так как $l = \frac{1}{3} < 1$, то ряд сходится.

Признак Коши имеет аналогичную формулировку. Только в качестве числа l используется $l = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n}$. Этот признак удобно использовать, когда легко извлекается корень $\sqrt[n]{u_n}$.

Интегральный признак Коши. Пусть члены ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ положительны и не возрастают, т.е.

$u_n > 0$ и $u_1 \geq u_2 \geq u_3 \geq \cdots \geq u_n \geq u_{n+1} \geq \cdots$

Пусть $f(x)$ –такая непрерывная на $[1, \infty)$, невозрастающая функция, что

$$f(1) = u_1,\ f(2) = u_2, \ldots f(n) = u_n, \ldots .$$

Тогда:

если несобственный интеграл $\int_1^{\infty} f(x)dx$ сходится, то сходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$

если указанный интервал расходится, то расходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$.

Пример 3.6. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 1}$$

Решение. Функция $f(x)$ может быть получена путем формальной замены n на x.

$$\int_1^{\infty} f(x)dx = \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 1} = \lim_{b\to\infty} \int_1^{b} \frac{dx}{x^2 + 1} =$$

$$= \lim_{b\to\infty}(arctg\, b - arctg\, 1) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

Интеграл сходится, значит ряд тоже сходится. Подчеркнем еще раз, что признаки сравнения, а также признаки Даламбера, Коши и интегральный признак Коши можно применять лишь к знакоположительным рядам.

3.Ряды с членами любого знака, абсолютная и условная сходимости. Признак Лейбница.

Знакопеременный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \boldsymbol{u_n}$ сходится, если сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |\boldsymbol{u_n}|$, составленный из модулей. При этом ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \boldsymbol{u_n}$ называется абсолютно сходящимся. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \boldsymbol{u_n}$ сходится, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |\boldsymbol{u_n}|$ расходится, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \boldsymbol{u_n}$ называется условно сходящимся.

Для исследования знакочередующихся рядов

$$\boldsymbol{u_1 - u_2 + u_3 \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} u_n}$$

$(\boldsymbol{u_n} > 0;\ \ n = 1, 2, \ldots)$ используется теорема Лейбница.

Теорема Лейбница. Если для знакочередующегося ряда

$\boldsymbol{u_1 - u_2 + u_3 \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} u_n},\ (\boldsymbol{u_n} > 0)$

выполняются условия

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \boldsymbol{u_n} = \boldsymbol{0}$;

2) $\boldsymbol{u_n} > \boldsymbol{u_{n+1}}$ для любого $\boldsymbol{n}$ **,** то: ряд сходится, его сумма положительна и не превосходит первого члена.

Пример 3.7. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\boldsymbol{(-1)^n}}{\boldsymbol{n\ ln\ n}}.$$

Решение. Данный ряд - знакочередующийся. Предел общего члена этого ряда при $\boldsymbol{n} \to \infty$ равен нулю, и члены ряда, взятые по абсолютной величине, образуют убывающую последовательность. По теореме Лейбница наш ряд будет сходиться.

Однако он не будет абсолютно сходящимся. Для этого достаточно доказать, что ряд

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{n\ ln\ n}}.$$

расходится. Докажем это с помощью интегрального признака. Имеем

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x ln\ x} = \lim_{b\to\infty} \int_2^b \frac{dx}{x ln\ x} = \lim_{b\to\infty} \int_2^b \frac{d(\ln x)}{ln\ x} = \lim_{b\to\infty} ln\ ln\ x \Big|_2^b =$$

$$= \lim_{b\to\infty} (ln ln\ b - \ln\ln 2) = \infty$$

Значит, ряд $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{n\,ln\,n}}$ расходится, а поэтому исходный ряд $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-\mathbf{1})^{\boldsymbol{n}}}{\boldsymbol{n\,ln\,n}}$ сходиться лишь условно.

Раздел 8. Общие функциональные ряды

[1,гл. 6, стр. 233-245] ; [2, гл. 3, стр. 106-190];

Рассмотрим произвольный функциональный ряд

$$\boldsymbol{u_1(x) - u_2(x) + \cdots + u_n(x) + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)} \qquad (4.1)$$

При одних $\boldsymbol{x}$ получающийся числовой ряд может сходиться, а при других расходиться. Совокупность значений $\boldsymbol{x}$, при которых ряд (4.1) сходится, называется областью сходимости функционального ряда (4.1).

5.Степенные ряды

[1,гл. 6, стр. 247-258];[2, гл. 3, стр. 109-112]; [№ 2526-2563(выборочно)].

Степенной ряд

$$\boldsymbol{a_0(x) - a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_n(x) + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)} \qquad (5.1)$$

есть частный случай общего функционального ряда. Областью сходимости степенного ряда (5.1) всегда является интервал $(-R, R)$с центром в точке $x = 0$. Этот интервал в некоторых случаях может выродиться в точку $x = 0$, а в некоторых случаях превратиться во всю прямую $(-\infty < x < \infty)$. В точках $x_1 = -R$ и $x_2 = R$ ряд нужно исследовать отдельно.

Область сходимости степенного ряда может быть найдена с помощью одного из признаков сходимости знакопостоянных числовых рядов.

Пример 5.1. Найти область сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\boldsymbol{x^n}}{\boldsymbol{n\,2^n}}.$$

Решение. Имеем $u_n = \frac{\boldsymbol{x^n}}{\boldsymbol{n\,2^n}}$**,** и $u_{n+1} = \frac{\boldsymbol{x^{n+1}}}{\boldsymbol{(n+1)\,2^{n+1}}}$

Далее в соответствии с признаком Даламбера имеем

$$l = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}n\cdot 2^n}{(n+1)\,2^{n+1}\cdot x^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x}{2}\cdot\frac{n}{n+1}\right| =$$

$$= \frac{|x|}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} = \frac{|x|}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{n}} = \frac{|x|}{2}.$$

Если $l = \frac{|x|}{2} < 1$, то по признаку Даламбера ряд из модулей, а значит, и исходныйряд будет сходиться. При $l = \frac{|x|}{2} > 1$ ряд будет расходиться, ибо, начиная с некоторого номера $\boldsymbol{n}$**,** выполнено неравенство $\left|\frac{\boldsymbol{u_{n+1}}}{\boldsymbol{u_n}}\right| > 1$**,** откуда следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0$. Итак, при $-2 < x < 2$ наш ряд сходится, при

$|x| > 2$ ряд расходиться. Исследуем отдельно сходимость в граничных точках $x_1 = -2,\ x_2 = 2$. При $x_1 = -2$ из заданного ряда получаем ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-\mathbf{1})^{\boldsymbol{n}}}{\boldsymbol{n}}$$

Последний ряд сходится в силу теоремы Лейбниц. При $x_2 = 2$ из заданного ряда получаем $\sum_{\boldsymbol{n}=\mathbf{1}}^{\infty} \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{n}}$, т.е. гармонический ряд, который, как известно, расходится. Значит областью сходимости данного степенного ряда является совокупность значений переменной $\boldsymbol{x}$, удовлетворяющих условию

$-2 < x < 2$**.** Если при нахождении области сходимости степенного ряда

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ получается

$$l = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = 0,$$

то что значит, что радиус сходимости ряда $R = \infty$, т.е. ряд сходится при всех x: $-\infty < x < \infty$**.**

Если получается

$$l = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \infty,$$

то $R = 0$ и ряд сходится лишь при $x = 0$.

Если рассматривается ряд по степеням $(x - \alpha)$, то обозначив $X = (x - \alpha)$, получаем ряд по степеням X, который исследуется указанным ранее способом. Пусть мы получим при этом, что ряд сходится при $-R < x < R$**.** Тогда исходный ряд сходится при $-R < x - \alpha < R$ или $(\alpha - R) < x < (\alpha + R)$.

Ряды Тейлора и Маклорена.

Частным случаем степенного ряда является *ряд Тейлора:*

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^k(a)}{k!}(x-a)^k + \cdots$$

При $\boldsymbol{a} = 0$ получаем *ряд Маклорена*

$f(x) = f(0) + \frac{f^{'}(0)}{1!}x + \frac{f^{''}(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{k}(0)}{k!}x^k + \cdots.$

В частности имеем:

$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^k}{k!} + \cdots,$

$sin\, x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots,$

$cos\, x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots.$

Эти ряды сходятся при всех $\boldsymbol{x}$**.** Часто используется биномиальный ряд:

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{m(m-1)\ldots[m-(n-1)]}{n!}x^n + ..$$

где $m -$ произвольное число.

Этот ряд сходится при

$$-1 < x < 1.$$

Точки $x = 1$ и $x = -1$ нужно исследовать отдельно.

Проиллюстрируем использование биномиального ряда на одном примере.

Пример 5.2. Разложить в ряд Маклорена функцию

$$f(x) = arcsin\, x\,.$$

Воспользуемся тем, что

$$\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin t \Big|_0^x = arcsinx - \arcsin 0 = \arcsin x\,. \qquad (5.2)$$

Разложим функцию

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} = (1-t^2)^{-\frac{1}{2}} = (1+(-t^2))^{-\frac{1}{2}}$$

в ряд Маклорена, используя биномиальный ряд при $x = -t^2$ и $m = -\frac{1}{2}$:

$$\frac{1}{\sqrt{1-t^2}} = (1+(-t^2))^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)}{1!}(-t^2) + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)}{2!}(-t^2)^2 + \cdots +$$

$$+ \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\ldots\left[-\frac{1}{2}-(n-1)\right]}{n!}(-t^2)^n + \cdots =$$

$$= 1 + \frac{1}{2\cdot 1!}t^2 + \frac{1\cdot 3}{2^2\cdot 2!}t^4 + \cdots + \frac{1\cdot 3\ldots(2n-1)}{2^n\cdot n!}t^{2n} + \cdots =$$

$$= 1 + \frac{1}{(2\cdot 1)}t^2 + \frac{1\cdot 3}{(2\cdot 1)(2\cdot 2)}t^4 + \dots + \frac{1\cdot 3\ldots(2n-1)}{(2\cdot 1)(2\cdot 2)(2\cdot 3)\ldots(2\cdot n)}t^{2n} + \dots =$$

$$= 1 + \frac{1}{(2\cdot 1)}t^2 + \frac{1\cdot 3}{(2\cdot 1)(2\cdot 2)}t^4 + \dots + \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}t^{2n} + \ldots =$$

$$=1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}t^{2n}, \ (-1 < t < 1).$$

Здесь символ $(2n-1)!!$ означает произведение всех нечетных чисел, не превосходящих $(2n-1)$, а символ $(2n)!!$ –всех четных чисел, не превосходящих $2n$. Проинтегрируем почленно этот ряд и, в соответствии с формулой (5.2), получим:

$$arcsin\, x = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)}, (-1 \le x \le 1).$$

Вопросы для самопроверки

1)Дайте определения сходящегося и расходящегося рядов. Исследуйте сходимость ряда, составленного из членов геометрической прогрессии.

2)Докажите необходимый признак сходимости ряда.

3) Докажите, что отбрасывание конечного числа членов ряда не изменяет его сходимости (расходимости)

4)Докажите первый признак сравнения рядов с положительными членами.

5)Докажите признак Даламбера. Приведите пример на применение этого признака.

6)Докажите интегральный признак (Коши) сходимости ряда. Приведите примеры на применение этого признака.

7)Дайте определение абсолютно сходящегося ряда. Докажите, что из абсолютной сходимости ряда следует его сходимость. Приведите примеры абсолютно и условно сходящихся рядов.

8)Докажите признак Лейбница сходимости знакочередующихся рядов.

9)Дайте определение области сходимости функционального ряда.

10)Докажите теорему Абеля о сходимости степенных рядов.

11)Выведите формулу для вычисления радиуса сходимости степенного ряда.

12)Разложите функцию $\boldsymbol{y = \sin x}$ в ряд Маклорена.

13)Разложите функцию $\boldsymbol{y = e^x}$ в ряд Маклорена.

14) Разложите функцию $\boldsymbol{y = arctg\, x}$ в ряд Маклорена.

Функции Бесселя. Уравнение Бесселя

Уравнение Бесселя называется линейное дифференциальное уравнение вида:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{x} \cdot \frac{dy}{dx} + \left(1 - \frac{v^2}{x^2}\right) y = 0, \qquad (6.1)$$

где x – независимая переменная;

y-искомая функция;

v-параметр, который называют индексом (порядком) уравнения.

Общее решение уравнения (6.1) для произвольного v (целого или дробного) может быть записано в виде:

$$y = C_1 \mathfrak{z}_v + C_2 N_v(x),$$

где функция $\mathfrak{z}_1(z)$ называется цилиндрической функцией первого рода с произвольным индексом v или функцией Бесселя, а функция $N_v(x)$ *Функцией Неймана* или цилиндрической функцией второго рода.

Пример 6.1. Написать общее решение уравнения:

$$y'' + \frac{1}{x} y' + \left(1 - \frac{1}{2x^2}\right) y = 0.$$

Решение. Запишем уравнение в виде:

$$y'' + \frac{1}{x} y' + \left(1 - \frac{\frac{1}{2}}{x^2}\right) y = 0; \; v^2 = \frac{1}{2}; \; v = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Общее решение

$$y = C_1 \mathfrak{z}_{\frac{1}{\sqrt{2}}}(x) + C_2 N_{\frac{1}{\sqrt{2}}}(x).$$

Пример 6.2. Написать общее решение уравнения:

$$y'' + \frac{1}{x} y' + \left(1 + \frac{4}{x^2}\right) y = 0.$$

Решение. Здесь $v = 2$ и общее решение записывается лишь следующим образом

$$y = C_1 \mathfrak{z}_2(x) + C_2 N_2(x).$$

Раздел 9. Ряды Фурье. Преобразование Фурье

[1,гл. 6, стр. 263-266, 291-293; гл. 9, стр. 414-420] ;

[2, гл. 3, стр. 112-123]; [№ 2671-2703(выборочно)].

Основные формулы

Теорема Дирихле. Если периодическая функция $\boldsymbol{f(x)}$ (с периодом $\boldsymbol{2\pi}$) кусочно-монотонна в промежутке $[-\boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{\pi}]$ и непрерывна в этом промежутке или имеет в нем конечное число точек разрыва первого рода, то в точке непрерывности она может быть представлена рядом Фурье.

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)}, \tag{7.1}$$

где

$$\boldsymbol{a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx;\ a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx\, dx}; \tag{7.2}$$

$$\boldsymbol{b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx\, dx}. \tag{7.3}$$

Если $\boldsymbol{x_0}$ − точка разрыва, то ряд Фурье сходится к величине

$$\boldsymbol{\frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}}.$$

$\boldsymbol{f(x_0+0)}$ есть правый предел функции $\boldsymbol{f(x)}$ в точке $\boldsymbol{x_0}$:

$$\boldsymbol{f(x_0+0) = \lim_{\varepsilon\to 0} f(x_0+\varepsilon)};$$

$\boldsymbol{f(x_0-0)}$ −левый предел:

$$\boldsymbol{f(x_0-0) = \lim_{\varepsilon\to 0} f(x_0-\varepsilon)}.$$

Коэффициенты $\boldsymbol{a_0, a_n, b_n}$ носят название коэффициентов Фурье.

Если $\boldsymbol{f(x)}$ −четная функция, то

$$\boldsymbol{b_n = 0;\ a_n = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x) \cos nx\, dx;\ a_0 = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x) dx}, \tag{7.4}$$

и функция разлагается в ряд только по косинусам:

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx} \tag{7.5}$$

Если $\boldsymbol{f(x)}$ −нечетная функция, то

$$\boldsymbol{a_n = 0 (n = 0, 1, 2 \dots)};$$

$$\boldsymbol{b_n = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x) \sin nx\, dx \quad (n = 1, 2 \dots)}, \tag{7.6}$$

и функция разлагается в ряд только по синусам:

$$\boldsymbol{f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx} \tag{7.7}$$

Для периодической функции $\boldsymbol{f(x)}$ с произвольным периодом $2l$ имеем более общие формулы:

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l}\right)}, \tag{7.8}$$

где

$$\boldsymbol{a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)dx; \quad a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx}; \tag{7.9}$$

$$\boldsymbol{b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx} \tag{7.10}$$

Для четной функции $\boldsymbol{f(x)}$ имеем:

$$\boldsymbol{a_0 = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)dx; \quad a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx; \; b_n = 0},$$

и ряд Фурье имеет вид

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{l}} \tag{7.11}$$

Для нечетной функции $\boldsymbol{f(x)}$ имеем:

$$\boldsymbol{a_0 = 0; \; a_n = 0; \; b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx},$$

и ряд Фурье имеет вид

$$\boldsymbol{f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{l}} \tag{7.12}$$

Для периодической функции имеет место равенство

$$\boldsymbol{\int_{-l}^{l} f(x)dx = \int_{-l+\lambda}^{l+\lambda} f(x)dx}$$

(λ - произвольное число), т.е. интервал интегрирования, длина которого равна периоду функции, можно сдвигать. Используя это свойство при $\lambda = l$, можно записать формулы (7.9) и (7.10) следующим образом:

$$\boldsymbol{a_0 = \frac{1}{l}\int_0^{2l} f(x)dx; \quad a_n = \frac{1}{l}\int_0^{2l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx}; \tag{7.13}$$

$$\boldsymbol{b_n = \frac{1}{l}\int_0^{2l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx}. \tag{7.14}$$

Если период $T = 2\pi$,то в последних формулах следует вместо $\boldsymbol{l}$ подставить π.

Пример 7.1. Разложить в ряд Фурье периодическую $(T = 2\pi)$ функцию $f(x) = x$ при $0 < x < 2\pi$.

Решение.

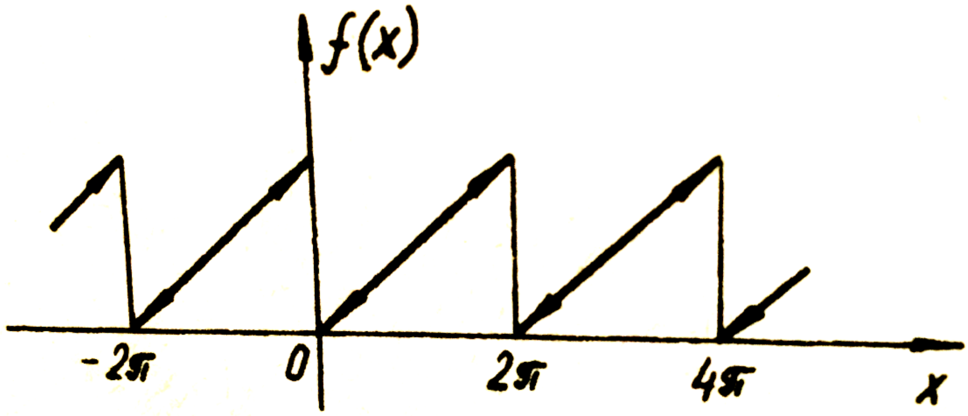


Рис.7.1.

Решение. Используя формулы (7.13), (7.14) при $2l = 2\pi$, имеем:

$$\boldsymbol{a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} xdx = 2\pi};$$

$$\boldsymbol{a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)cosxdx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} xcosnxdx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{xsinnx}{n} + \left|\frac{cosnx}{n^2}\right]\right.} \begin{matrix} 2\pi \\ 0 \end{matrix} \boldsymbol{= 0}$$

$$\boldsymbol{b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)sinnxdx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} xsinnxdx = \frac{1}{\pi}\left[-\frac{xcosnx}{n} + \left|\frac{sinnx}{n^2}\right]\right.} \begin{matrix} 2\pi \\ 0 \end{matrix} \boldsymbol{= -\frac{2}{n}}$$

В итоге имеем

$$f(x) = \boldsymbol{\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n cos\, nx + b_n sin\, nx = \pi - 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{sinx}{n}} =$$

$$\boldsymbol{= \pi - 2\cdot\frac{sinx}{1} - 2\cdot\frac{sin2x}{2} - 2\cdot\frac{sin3x}{3}} - \cdots$$

Пример 7.2. Разложить в ряд Фурье периодическую **(** $T = 2\pi$) функцию:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{U}{\pi}x \text{ при } 0 \le x < \pi; \\ -\frac{U}{\pi}x \text{ при } -\pi \le x < 0 \end{cases}.$$

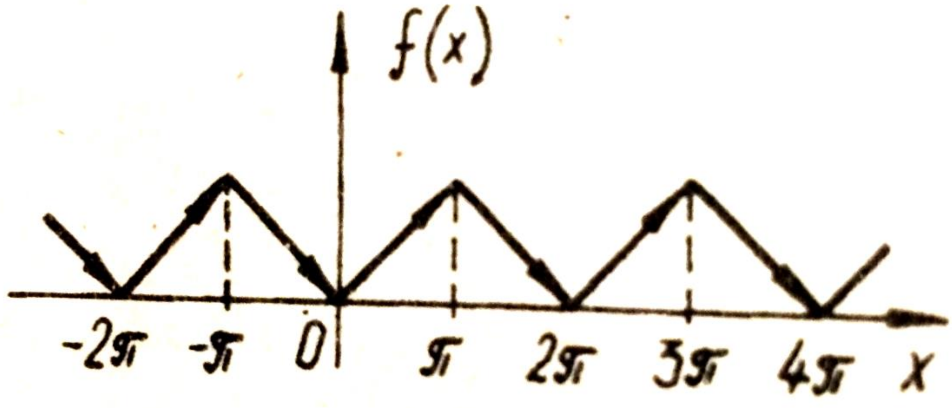


Рис.7.2.

Решение. Очевидно, что данная функция четная. Поэтому:

$$\boldsymbol{b_n = 0}; \quad \boldsymbol{a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{U}{\pi}xdx = \frac{2U}{\pi^2}\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_0^{\pi} = U};$$

$$\boldsymbol{a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)cosnxdx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{U}{\pi}xcosnxdx = \frac{2U}{\pi^2}\left(\frac{xsinx}{n} + \frac{1}{n^2}cosnx\right)\Big|_0^{\pi} =}$$

$$\boldsymbol{=\frac{2U}{\pi^2 n^2}[(-1)^n - 1]}$$

или

$$a_n = \begin{cases} 0 \text{ при } n \text{ четном } (n = 2\text{к}; \text{к} = 1,2,\dots); \\ -\frac{4U}{\pi^2 n^2} \text{ при } n \text{ нечетном } (n = 2\text{к} - 1; \text{к} = 1,2,\dots) \end{cases}$$

Следовательно,

$$f(x) = \frac{U}{2} - \frac{4U}{\pi^2}\sum_{n=1,3,5\dots}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2} = \frac{U}{2} - \frac{4U}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}$$

или

$$f(x) = \frac{U}{2} - \frac{4U}{\pi^2}\left(\cos x + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \cdots\right).$$

Ряды Фурье в комплексной форме

Ряд Фурье (7.3) для функции $f(x)$ с периодом $T = 2l$ может быть записан в комплексной форме:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{i\frac{n\pi x}{l}} \qquad (i^2 = -1) \qquad (7.15)$$

где комплексные коэффициенты Фурье C_n определяются формулами:

$$C_n = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)e^{-i\frac{n\pi x}{l}}\, dx, \quad n = 0, \pm1, \pm2, \dots \qquad (7.16)$$

Коэффициенты C_n связаны с коэффициентами $a_0,\ a_n,\ b_n$ следующим образом:

$$C_0 = \frac{a_0}{2};\, C_n = \frac{1}{2}(\, a_n - i\, b_n),\, C_n = \frac{1}{2}(\, a_n + i\, b_n) \qquad (7.17)$$

Пример 7.3. Разложить в ряд Фурье в комплексной форме периодическую функцию $f(x)$ из примера 7.1.

$$f(x) = x \quad \text{при} \;\; 0 < x < 2\pi \qquad (2l = 2\pi; l = \pi).$$

Решение. По формуле (7.16) находим коэффициенты Фурье C_n для $n = \pm 1, \pm 2, \dots$:

$$C_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi} xe^{-inx}dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(-\left.\frac{xe^{-inx}}{in}\right|_0^{2\pi} + \frac{1}{in}\int_0^{2\pi} e^{-inx}\,dx\right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(-\left.\frac{xe^{-inx}}{in}\right|_0^{2\pi} + \frac{1}{i^2n^2}\left.e^{-inx}\right|_0^{2\pi}\right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(-\frac{2\pi e^{-i2\pi n}}{in} + \frac{1}{n^2}(e^{-i2\pi n} - 1)\right)$$

Так как

$\frac{1}{i} = -i$ и $e^{-i2\pi n} = \cos(-2\pi n) + isin(-2\pi n) = 1,$

то $C_n = \frac{i}{n}$ $(n =$:

Для C_0 имеем:

$$C_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-l}^{2\pi} xdx = \frac{1}{2\pi}$$

Используя формулу (7.15) имеем:

$$f(x) = C_0 + \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{inx} = \pi$$

Амплитудный спектр периодической функции

В радиотехнике и электроники часто нужно разложить в ряд Фурье периодическую (с периодом $2l = T$) функцию от времени $f(t)$. Тогда аргумент $\frac{n\pi x}{l}$ в формулах (7.8), (7.9), (7.10) приобретает вид $n\frac{2\pi}{T}t$. Далее вводят в рассмотрение частоту повторения $F = \frac{1}{T}$ и круговую частоту повторения $\Omega =$

$2\pi F = \frac{2\pi}{T}$. Тогда $n\frac{2\pi}{T}t = n\Omega t$ и ряд Фурье (7.8) записывается следующим образом:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\Omega t + b_n \sin n\Omega t\,, \tag{7.18}$$

где коэффициенты Фурье вычисляются по формулам:

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)dt; a_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\cos n\Omega t\, dt; \tag{7.19}$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\sin n\Omega t\, dt;$$

Для четной функции $f(t)$ имеем: $b_n = 0$ и

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\Omega t\,, \tag{7.18$'$}$$

где

$$a_0 = \frac{4}{T}\int_{0}^{\frac{T}{2}} f(t)dt; a_n = \frac{4}{T}\int_{0}^{\frac{T}{2}} f(t)\cos n\Omega t\, dt; \tag{7.19$'$}$$

Для нечетной функции $f(t)$ имеем: $a_n = 0$ и

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\Omega t\,, \tag{7.18$''$}$$

где

$$b_n = \frac{4}{T}\int_{0}^{\frac{T}{2}} f(t)\, sin\, n\Omega t\,. \tag{7.19$''$}$$

Величина $\frac{a_0}{2}$ называется постоянной составляющей сигнала $f(t)$ и является средним значением функции $f(t)$ за период T.

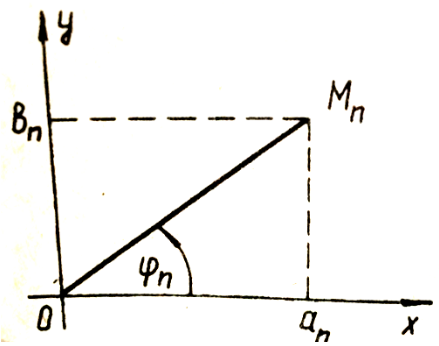


Рис.7.3.

Ряд Фурье (см.формулу (7.18)) может быть записан в другой форме. Пусть точка M_n имеет декартовы координаты (a_n, b_n) и полярные координаты (c_n, φ_n) (рис.7.3). Известно, что декартовы и полярные координаты связаны следующими соотношениями:

$$a_n = c_n \cos\varphi_n\,;\ \ b_n = c_n \sin\varphi_n\,; \qquad (7.20)$$

$$c_n = \sqrt{a^2{}_n + b^2{}_n};\ \ tg\,\varphi_n = \frac{b_n}{a_n}. \qquad (7.21)$$

Подставляя выражения (7.20) в формулу (7.18) и обозначая $\frac{a_0}{2} = c_0$, получаем:

$$f(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos\varphi_n \cos n\Omega t + c_n \sin\varphi_n \sin n\Omega t = \qquad (7.22)$$

$$= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(n\Omega t - \varphi_n).$$

Итак, периодическая функция $f(t)$ может быть представлена в виде постоянной составляющей c_0 и суммы слагаемых вида:

$$c_n \cos(n\Omega t - \varphi_n),$$

каждое из которых есть косинусоидальное колебание с амплитудой c_n и начальной фазой φ_n.Частоты колебаний кратны частоте повторения $\Omega = \frac{2\pi}{T}$. Отдельные составляющие носят названия гармоник. Колебания $c_1 \cos(\Omega t - \varphi_1)$, соответствующее $n = 1$, называется первой гармоникой, колебание $-c_2 \cos(2\Omega t - \varphi_2)$ –второй гармоникой и т.д. Совокупность величин $\{c_1, c_1, \ldots, c_n, \ldots\}$ носят название *спектра амплитуд* (или амплитудного спектра). Совокупность величии $\{\varphi_n\}$ называется *спектром фаз* или фазовым спектром. Часто, когда говорят *спектр,* имеют в виду именно амплитудный спектр.

Амплитудный спектр изображают графически в виде вертикальных отрезков длиной c_n, расположенных в точках $n\Omega$ на оси частот ω (рис.7.4).

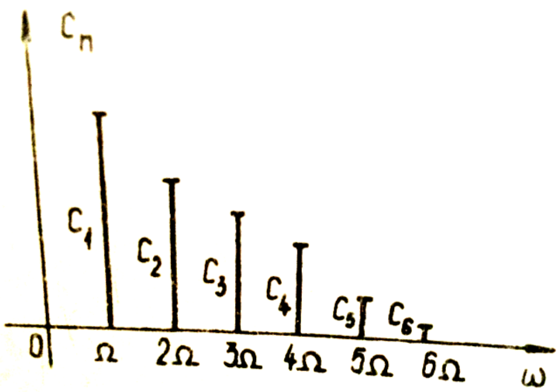


Рис.7.4.

Таким образом, периодической функции $f(t)$ соответствует дискретный амплитудный спектр.

Амплитудный спектр $\{c_n\}$ можно еще найти, используя комплексные коэффициенты c_n:

$$c_n = |2c_n| \ \ (n=1,2,\ldots);\ c_0 = C_0.$$

Пример 7.4. Записать в ряд Фурье для периодической (с периодом T) функции:

$$u(t) = \begin{cases} U_0 \text{ при} -\frac{\tau}{2} < t < \frac{\tau}{2} \ \ (\tau < T); \\ 0 \text{ при } \frac{\tau}{2} < t < \frac{T}{2} \ \text{ или} -\frac{T}{2} < t < -\frac{\tau}{2} \end{cases}$$

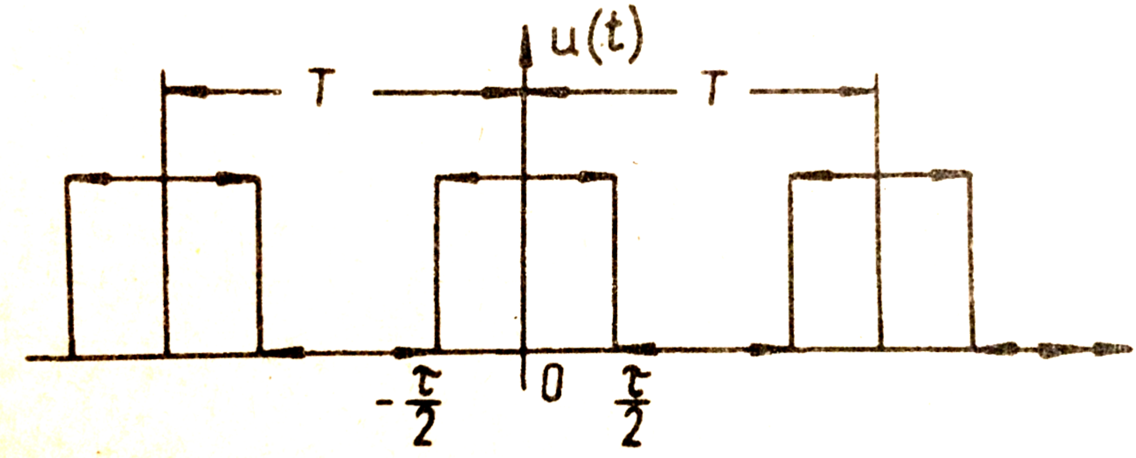


Рис.7.5

Решение. Воспользуемся формулами (7.19). Поскольку функция $u(t)$ четная, то:

$$b_n = 0; \ a_0 = \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} u(t)dt; \ \ a_n = \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} u(t)\cos n\Omega t\, dt;$$

$$a_0 = \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} u(t)dt = \frac{4}{T}\, U_0 \int_0^{\frac{\tau}{2}} dt = \Big|\frac{4}{T}\, U_0\, \Big|_0^{\frac{\tau}{2}} = \frac{4\,U_0\,\tau}{T\cdot 2} = \frac{2\,U_0\,\tau}{T}.$$

Обозначим $S_0 = U_0\tau$, где S_0 – площадь импульса. Тогда $a_0 = 2\frac{S_0}{T}$ и постоянная составляющая $\frac{a_0}{2} = \frac{S_0}{T}$.

$$a_0 = \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} u(t)\cos n\Omega t\, dt = \frac{4}{T}\, U_0 \int_0^{\frac{\tau}{2}} \cos n\Omega t\, dt = \frac{4}{T}\, U_0\, \frac{1}{n\Omega} \sin n\Omega t \Big|_0^{\frac{\tau}{2}} =$$

$$= \frac{4\,U_0}{T}\cdot\frac{sin\left(\frac{n\Omega\tau}{2}\right)}{n\Omega} = \frac{4\,U_0\,\tau}{T\cdot 2}\cdot\frac{sin\left(\frac{n\Omega\tau}{2}\right)}{\left(\frac{n\Omega\tau}{2}\right)} = 2\,\frac{S_0}{T}\cdot\frac{sin\left(\frac{n\Omega\tau}{2}\right)}{\left(\frac{n\Omega\tau}{2}\right)}$$

Ряд Фурье запишется следующим образом:

$$u(t) = \frac{S_0}{T} + 2\frac{S_0}{T}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{sin\left(\frac{n\Omega\tau}{2}\right)}{\left(\frac{n\Omega\tau}{2}\right)}\cos n\Omega t$$

Амплитудный спектр в данном случае есть выбор чисел

$$\{c_1, c_1, \ldots, c_n, \ldots\}:$$

$$c_n = \sqrt{a^2{}_n + b^2{}_n} = \sqrt{a^2{}_n} = |a_n| = 2\frac{S_0}{T}\left|\frac{sin\left(\frac{n\Omega\tau}{2}\right)}{\left(\frac{n\Omega\tau}{2}\right)}\right| \quad (n=1,2,\ldots).$$

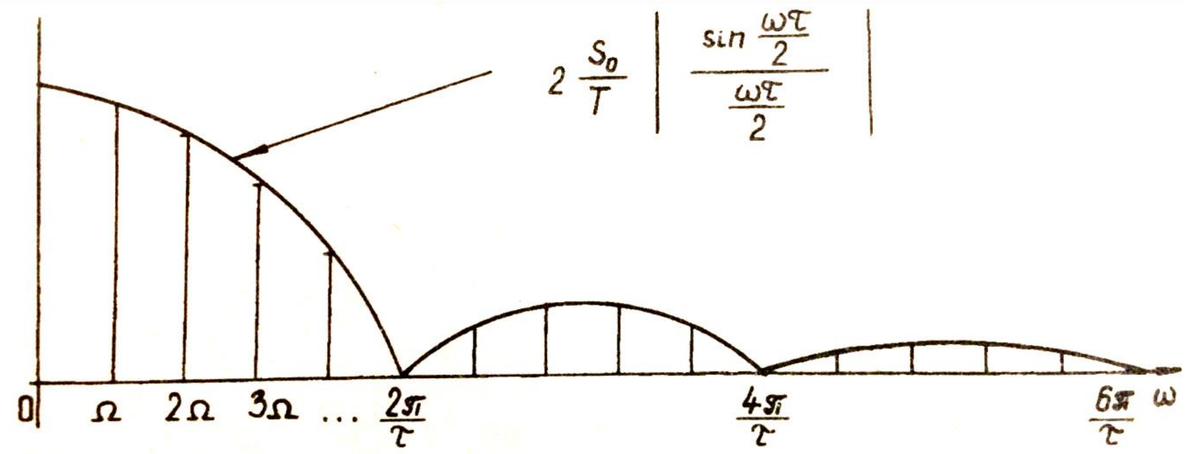


Рис.7.6.

Амплитудный спектр для данной функции $u(t)$ изображен на рис.7.6. По оси абсцисс на рис.7.6. отложена частота ω, которая может принимать лишь дискретные значения Ω, $2\Omega\ldots$, $n\Omega$, ... Огибающей амплитудного спектра является функция

$$2\frac{S_0}{T}\left|\frac{sin\left(\frac{n\Omega\tau}{2}\right)}{\left(\frac{n\Omega\tau}{2}\right)}\right|$$

3.Интеграл Фурье. Преобразование Фурье в комплексной форме. Обратное преобразование Фурье. Спектральная плотность функции

Если непериодическая функция $f(t)$ абсолютно интегрируема на всей числовой оси, т.е., если интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|dt = \lim_{M\to\infty}\int_{-M}^{M}|f(t)|dt$$

сходится и если она удовлетворяет условиям Дирихле на любом конечном интервале, то ее можно представить интегралом Фурье

$$f(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}(a(\omega)cos\omega t + b(\omega)sin\omega t)d\omega, \qquad (7.23)$$

где функции $a(\omega)$ и $b(\omega)$ вычисляется по формулам:

$$a(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) cos\omega t dt;$$

$$b(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) sin\omega t dt; \qquad (7.24)$$

В точке разрыва $t = t_0$ интервал Фурье сходится к величине:

$$\frac{f(t_0 + 0) + f(t_0 - 0)}{2}$$

где $f(t_0 + 0) = \lim_{\varepsilon \to 0} f(t_0 + \varepsilon)$; $f(t_0 - 0) = \lim_{\varepsilon \to 0} f(t_0 - \varepsilon)$; $\varepsilon > 0$.

Интеграл Фурье (7.23) является аналогом ряда Фурье, а функции $a(\omega)$, $b(\omega)$ аналогичны коэффициентам Фурье $a(\omega)$ и $b(\omega)$.

Если $f(t)$ – четная функция, то $b(\omega) = 0$, и интеграл Фурье ззапишется следующим образом:

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_c(\omega) cos\omega t d\omega; \qquad (7.25)$$

где функции $S_c(\omega)$ вычисляется по формуле:

$$S_c(\omega) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} f(t) cos\omega t dt; \qquad (7.26)$$

Функция $S_c(\omega)$ называется косинус-преобразованием Фурье от функции $f(t)$

Аналогично, если $f(t)$ –нечетная, то $a(\omega) = 0$ и

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_з(\omega) sin\omega t d\omega; \qquad (7.27)$$

где

$$S_з(\omega) = 2 \int_{0}^{\infty} f(t) sin\omega t dt; \qquad (7.28)$$

Функция $S_з(\omega)$ называется синус-преобразованием Фурье от функции $f(t)$.

Можно записать интеграл Фурье в комплексной форме

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{i\omega t} d\omega; \qquad (7.29)$$

где

$$S(\omega) = 2 \int_{0}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \ \ (i^2 = -1) \qquad (7.30)$$

Формулы (7.29), (7.30) носят название пары преобразований Фурье. Формула (7.30) соответствует прямому преобразованию Фурье,формула (7.29) соответствует обратному преобразванию Фурье.Функция $S(\omega)$ называется спектральной плотностью функции $f(t)$ (часто говорят просто: спектр функции $f(t)$). Заметим, что $S(\omega)$ $-$комплексная функция. Поэтому часто функцию $S(\omega)$называют комплексным спектром функции $f(t)$.

Ее модуль (абсолютная величина) $|S(\omega)|$ носят название амплитудной спектральной плотности (или просто: амплитудного спектра). Иногда, говорят: "спектр", имея в виду функцию $|S(\omega)|$.

Итак, с помощью прямого преобразования Фурье (7.30) по функции $f(t)$ находят ее спектральную плотность $S(\omega)$, а с помощью обратного преобразования Фурье (7.29) по спектральной плотности $S(\omega)$ находят функцию $f(t)$. Если в формуле (7.30) записать $e^{-i\omega t}$ в виде

$$e^{-i\omega t} = cos\ \omega t - i\ sin\ \omega t,$$

а затем учесть формулы (7.24), то получим следующее соотношение между спектральной плотностью $S(\omega)$ и функциями $a(\omega)$, $b(\omega)$:

$$S(\omega) = a(\omega) - ib(\omega) \qquad (7.31)$$

Если $f(t)$ $-$четная, то $b(\omega) = 0$

$$S(\omega) = a(\omega) = S_{\text{с}}(\omega) = 2\int_0^{\infty} f(t)cos\omega tdt; \qquad (7.32)$$

Если $f(t)$ $-$нечетная, то $a(\omega) = 0$ и

$$S(\omega) = -ib(\omega) = -iS_{\text{з}}(\omega) = -i2\int_0^{\infty} f(t)sin\omega tdt; \qquad (7.33)$$

Заметим, что множитель $\frac{1}{2\pi}$ может стоять как в обратном преобразовании, так и в прямом преобразовании. В связи с тем, что в радиотехнике по традиции спектральная плотность $S(\omega)$ записывается без множителя $\frac{1}{2\pi}$, мы записали множитель $\frac{1}{2\pi}$в обратном преобразовании (7.29). В учебнике [1] множитель $\frac{1}{2\pi}$ стоять в прямом преобразовании.

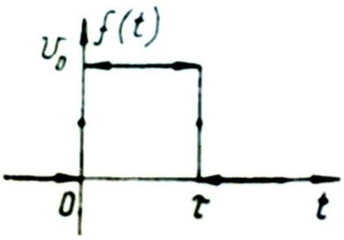


Рис.7.7

Пример 7.5. Представить интегралом Фурье функции:

$$f(t)=\begin{cases} U_0 \text{ при } 0<t<\tau; \\ \dfrac{U_0}{2} \text{ при } t=0 \text{ или } t=\tau; \\ 0 \text{ при } t<0 \text{ или } t>\tau. \end{cases}$$

Решение. Функция удовлетворяет условиям Дирихле (она непрерывна при $-\infty<t<\infty$ за исключением двух точек разрыва первого рода при $t=0$ и $t=1$) и условию абсолютной интегрируемости на всей оси.

Способ 1. Используем формулу (7.23):

$$f(t)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty((a(\omega)\,cos\,\omega t+b(\omega)\,sin\,\omega t)d\omega$$

Найдём $a(\omega)$ и $b(\omega)$:

$a(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\,cos\,\omega tdt=U_0\int_0^\tau cos\,\omega tdt=\frac{U_0}{\omega}\sin\omega t\Big|_0^\tau=U_0\tau\frac{sin\omega\tau}{\omega\tau}=$

$$=S_0\frac{sin\omega\tau}{\omega\tau}$$

($S_0=U_0\tau$ –площадь импульса).

$b(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\,sin\,\omega tdt=U_0\int_0^\tau sin\,\omega tdt=-\frac{U_0}{\omega}\cos\omega t\Big|_0^\tau=$

$$=-\frac{U_0}{\omega}(cos\,\omega\tau-1)=S_0\frac{1-cos\omega\tau}{\omega\tau}$$

Тогда

$$f(t)=\frac{S_0}{\pi}\int_0^\infty\frac{sin\omega\tau}{\omega\tau}cos\,\omega t+\frac{1-cos\omega\tau}{\omega\tau}sin\,\omega t)d\omega=$$

$$=\frac{S_0}{\pi}\int_0^\infty\frac{sin\omega t}{\omega\tau}cos\,\omega t+\frac{2sin^2\frac{\omega t}{2}}{\omega\tau}sin\,\omega t)d\omega$$

Способ 2. Используем интеграл Фурье в комплексной форме (7.29):

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}S(\omega)e^{i\omega t}d\omega$$

Найдём спектральную плотность (или комплексный спектр $S(\omega)$) (7.30):

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-i\omega t} dt = U_0 \int_0^{\tau} e^{-i\omega t} dt = -\frac{U_0}{i\omega} e^{-i\omega t}\Big|_0^{\tau} =$$

$$= -\frac{U_0}{i\omega}\left(e^{-i\omega t} - 1\right) = U_0 \tau \frac{(1 - e^{-i\omega\tau})}{i\omega\tau} = S_0 e^{-i\frac{\omega\tau}{2}} \frac{\left(e^{i\frac{\omega\tau}{2}} - e^{-i\frac{\omega\tau}{2}}\right)}{2i} \cdot \frac{1}{\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)}$$

Используя формулу

$$\frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i} = sin\,\varphi$$

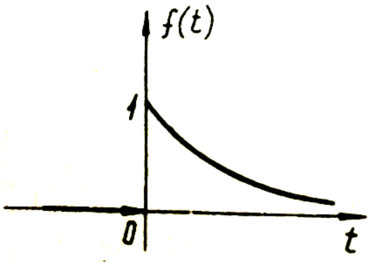
получаем для $S(\omega)$:

$$S(\omega) = S_0 e^{-i\frac{\omega\tau}{2}} \left(\frac{sin\frac{\omega\tau}{2}}{\frac{\omega\tau}{2}} \right)$$

Тогда, подставляя $S(\omega)$ в интеграл Фурье, получаем ответ:

$$f(t) = \frac{S_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{sin\frac{\omega\tau}{2}}{\frac{\omega\tau}{2}} \cdot e^{-i\frac{\omega\tau}{2}} \cdot e^{i\omega t} d\omega$$

Пример 7.6. Найти комплексный и амплитудный спектры функции:



$$f(t) = \begin{cases} e^{-t} \text{при } t \geq 0; \\ 0 \text{ при } t < 0 \end{cases}$$

Рис. 7.8.

Решение. Используем формулу (7.30):

Рис. 7.8.

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-i\omega t} dt = \int_0^{\infty} e^{-t} \cdot e^{-i\omega t} dt = \int_0^{\infty} e^{-(1+i\omega)t} dt =$$

$$= -\lim_{M\to\infty} \frac{e^{-(1+i\omega)t}}{(1+i\omega)}\Big|_0^M = -\frac{\lim\limits_{M\to\infty} e^{-(1+i\omega)M} - 1}{(1+i\omega)} = -\frac{\lim\limits_{M\to\infty}(e^{-M} \cdot e^{-i\omega M} - 1)}{(1+i\omega)}$$

Величина e^{-M} есть бесконечно малая величина при $M \to \infty$,а величина $e^{-i\omega M}$ ограничена по модулю. В самом деле: в соответствии с формулой Эйлера $e^{i\varphi} = cos\,\varphi + isin\,\varphi$, имеем

$$\left| e^{-i\omega M} \right| = |cos\,\omega M - isin\,\omega M| = \sqrt{cos^2\,\omega M + sin^2\,\omega M} = 1$$

Поэтому

$$\lim_{M\to\infty}\left(e^{-M}\cdot e^{-i\omega M}\right) = 0$$

В итоге имеем комплексный спектр:

$$S(\omega) = -\frac{0-1}{(1+i\omega)} = \frac{1}{(1+i\omega)} = \frac{(1-i\omega)}{(1+i\omega)(1-i\omega)} = \frac{(1-i\omega)}{(1+\omega^2)} =$$

$$= \frac{1}{(1+\omega^2)} - i\frac{\omega}{(1+\omega^2)}$$

Найдём теперь амплитудный спектр $|S(\omega)|$:

$$|S(\omega)| = \left|\frac{1-i\omega}{1+\omega^2}\right| = \frac{|1-i\omega|}{(1+\omega^2)} = \frac{\sqrt{1+\omega^2}}{(1+\omega^2)} = \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2}}$$

Амплитудный спектр $|S(\omega)|$ представлен на рис. 7.9.

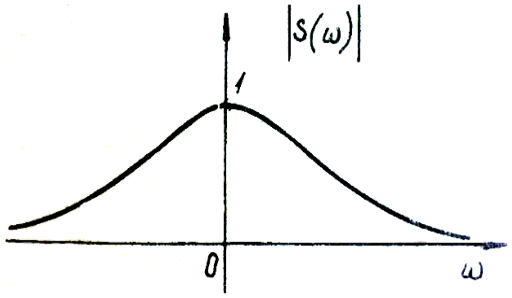


Рис. 7.9.

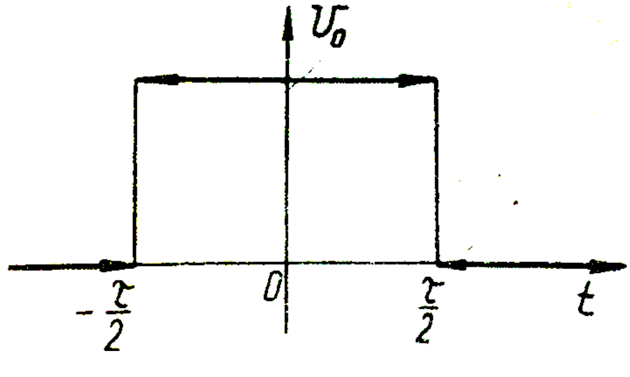
Пример 7.7. Определить комплексный и амплитудный спектры прямоугольного импульса, заданного уравнениями:

$$u(t) = \begin{cases} U_0 \text{ при } -\frac{\tau}{2} < t < \frac{\tau}{2} \\ 0 \text{ при } t < -\frac{\tau}{2} \text{ или } t > \frac{\tau}{2} \end{cases}$$

Решение. Функция $u(t)$ - четная. Используем формулу (7.32) для нахождения комплексного спектра $S(\omega)$:

$$S(\omega) = S_c(\omega) = 2\int_0^{\infty} f(t)\cos\omega t dt = 2\int_0^{\frac{\tau}{2}} U_0 \cos\omega t dt =$$

$$= 2U_0 \left.\frac{\sin\omega t}{\omega}\right|_0^{\frac{\tau}{2}} = 2U_0\frac{\sin\omega\frac{\tau}{2}}{\omega} = U_0\tau\frac{\sin\frac{\omega\tau}{2}}{\frac{\omega\tau}{2}} = S_0\frac{\sin\frac{\omega\tau}{2}}{\frac{\omega\tau}{2}}$$



где $S_0 = U_0\tau$ –площадь импульса

Отметим, что этот спектр отличается от спектра в примере 7.5 лишь множителем $e^{-i\frac{\omega\tau}{2}}$.

Амплитудный спектр $|S(\omega)|$ равен:

$$|S(\omega)| = S_0\left|\frac{\sin\frac{\omega\tau}{2}}{\frac{\omega\tau}{2}}\right|$$

Рис. 7.10

График этой функции приведён на рис. 7.11

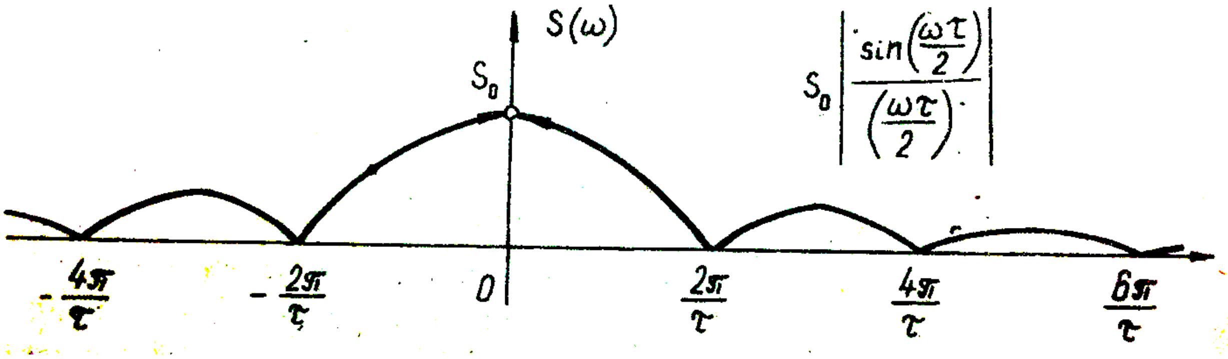


Рис. 7.11

Заметим, что функция $|S(\omega)|$ при $\omega > 0$ с точностью до коэффициента $\frac{2}{T}$ совпадает с огибающей

$$\frac{2}{T}S_0\left|\frac{sin\frac{\omega\tau}{2}}{\frac{\omega\tau}{2}}\right|$$

Дискретного амплитудного спектра последовательности прямоугольных импульсов (пример 7.4 в предыдущей теме). Такая закономерность имеет место для импульсов произвольной формы.

Вопросы для самопроверки

1.Выведите формулы для коэффициентов ряда Фурье.
2.Сформулируйте достаточные условия разложимости функции в ряд Фурье. Приведите примеры функций, удовлетворяющих и не удовлетворяющих этим условиям.
3.Выведите формулы для коэффициента ряда Фурье для четных и нечётных функций.
4.Представьте ряд Фурье в комплексной форме.
5.Дайте определение преобразования Фурье (спектральной плотности).

Раздел 10. Криволинейные интегралы

Криволинейный интеграл по координатам (интеграл второго типа).

Пусть во всех точках дуги (АВ) плоской кривой l определена непрерывная функция двух переменных $P(x, y)$

Разбиваем дугу (АВ) на n участков Δl_i $(i = 1,2, \dots n)$.

Внутри каждого участка произвольным образом выбираем точку $M(x_i, y_i)$. Проектируем участки Δl_i на ось Ox и составляем интегральную сумму:

$$\sum_{i=1}^{n} P(x_i\ y_i)\Delta x_i$$

Предел, к которому стремится интегральная сумма при $n \to \infty$ называется криволинейным интегралом второго типа по дуге (АВ):

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} P(x_i\ y_i)\Delta x_i = \int_{(AB)} P(x, y)dx$$

Аналогично, если на дуге (АВ) задана вторая непрерывная функция $Q(x, y)$, то, проектируя участки дуги Δl_i на ось Oy

получим:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} Q(x_i\ y_i)\Delta y_i = \int_{(AB)} Q(x, y)dy$$

Криволинейный интеграл второго типа общего вида определяется суммой этих интегралов:

$$\int_{(AB)} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_{(AB)} P(x, y)dx + \int_{(AB)} Q(x, y)dy$$

При вычислении этих интегралов дуга (АВ) обходится в одном и том же направлении (от А к В).

Криволинейный интеграл второго типа меняет знак на противоположный при изменении направления интегрирования:

$$\int_{(AB)} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = -\int_{(BA)} P(x, y)dx + Q(x, y)dy$$

Если кривая (АВ) задана уравнением $y = f(x)$ $(a \le x \le b)$, то

криволинейный интеграл второго типа вычисляется по формуле

$$\int_{(AB)} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_{a}^{b} \{P[x, f(x)] + Q[x, f(x)]f'(x)\}\, dx$$

Если кривая (АВ) задана параметрическими уравнениями $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ $(\alpha \leq t \leq \beta)$,то криволинейный интеграл второго типа вычисляется по формуле

$$\int_{(AB)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_{\alpha}^{\beta} \{P[\varphi(t)\,\psi(t)]\varphi'(t) + Q[\varphi(t)\,\psi(t)]\,\psi'(t)\}\,dt$$

Если функции $P(x,y)$, $Q(x,y)$ рассматривать как проекции некоторой переменной силы $\overline{F}$ на координатные оси,то криволинейный интеграл второго типа выражает работа силы $\overline{F}(P,Q)$, точка приложения которой описывает кривую (АВ).

В этом заключается физический смысл криволинейного интеграла второго типа.

Пример 8.1. Вычислить криволинейный интеграл $\int_l x^3dx + x^2dy$ от точки *A (0,0)* до *B (1,1)* вдоль линий:

1)$y = x^2$;

2)$y = x^3$;

Решение. 1.Вдоль линии $y = x^2 \quad dy = 2xdx$

По формуле (8.1)

$Y = \int_0^1 x^3dx + \int_0^1 x^2 2xdx = \frac{3}{4}x^4 \begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix} = \frac{3}{4} \Big|$

2.Вдоль линии $y = x^3$, $dy = 3x^2dx$

Аналогично

$$\mathfrak{z} = \int_0^1 x^3dx + \int_0^1 x^2 3x^2dx = \left(\frac{x^4}{4} + \frac{3}{5}x^5\right) \begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix} = \frac{17}{20}$$

Из примера следует, что криволинейный интеграл, вообще говоря, зависит от пути интегрирования.

Определение. Плоская область D называется односвязной, если любая область, ограниченная простым (т.е. несамопересекающимся) замкнутым контуром l, целиком принадлежит области D. Если рассматривать только ограниченные области, то односвязной областью D будет область, ограниченная единственным замкнутым контуром l.

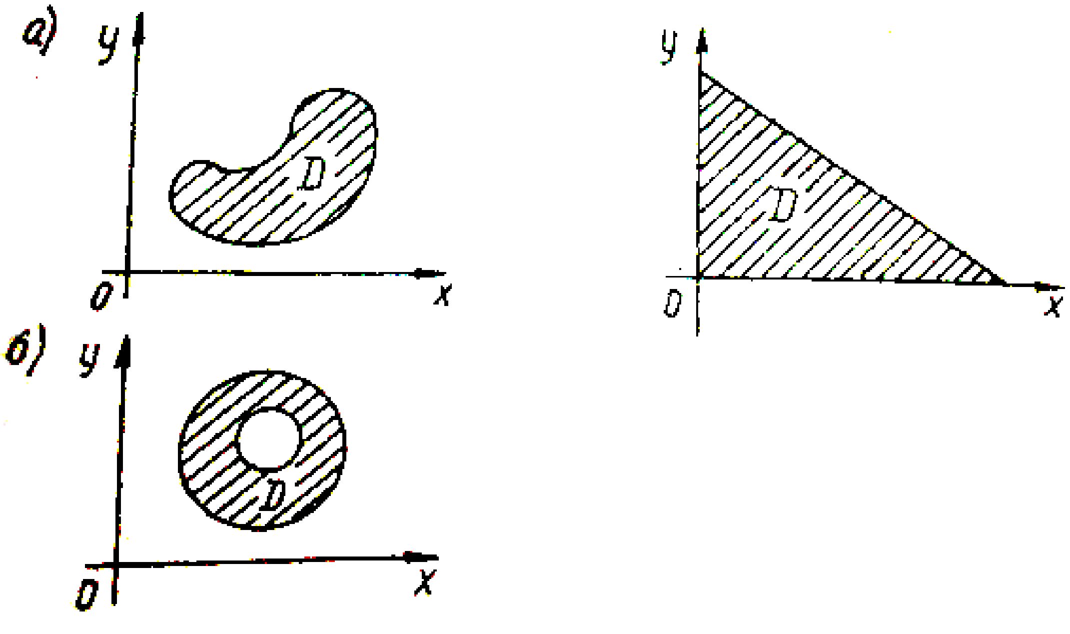


Рис. 8.1

На рис.8.1, а изображены односвязные области, на рис. 8.1, б – неодносвязная.

Если функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ определены и непрерывны вместе со своими частными производными $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ в замкнутой ограниченной односвязной области D

1) $\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$

2) $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = du(x, y)$

$$u(x, y)$$

$$u(x, y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P(x, y)dx + Q(x, y)dy + C$$

При любой кривой l от точки $M_0(x_0, y_0)$ до точки $M(x, y)$ принадлежащей области D;

3) криволинейный интеграл по любому замкнутому контуру принадлежащему области D, равен нулю:

$$\oint_l P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$$

Пример 8.2. Вычислить криволинейный интеграл

$$\int\limits_{(AB)} (4xy + 5y^3)dx + (2x^2 + 15xy^2)dy$$

от точки *A (0,0)* до *B (1,1)* вдоль линий (рис.8.2)

1)$y^2 = x$;

2)$y = x$; **Решение.** В данном интеграле:

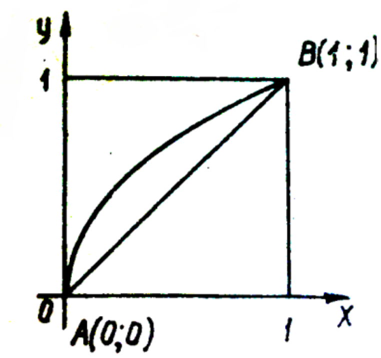


Рис. 8.2

$P(x,y) = 4xy + 5y^3$; $\frac{\partial P}{\partial y} = 4x + 15y^2$,

$Q(x,y) = 2x^2 + 15xy^2$; $\frac{\partial Q}{\partial y} = 4x + 15y^2$.

Криволинейный интеграл не зависит от пути интегрирования, так как функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ и их производные непрерывны во всей плоскости, и выполняется условие $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$

1.Вдоль кривой $y^2 = x, dx = 2ydy$

$$I_1 = \int\limits_l (4xy + 5y^3)dx + (2x^2 + 15xy^2)dy = \int\limits_0^1 35y^4\,dy = 7y^5 \Big|_0^1 = 7;$$

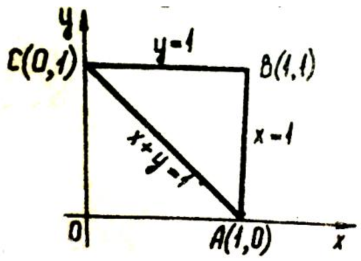
2.По прямой $y = x, dy = dx$

$$I_2 = \int\limits_l (4xy + 5y^3)dx + (2x^2 + 15xy^2)dy = \int\limits_0^1 (6x^2 + 20x^3)dx =$$

$$= (2x^3 + 5x^4)\Big|_0^1 = 7.$$

Пример 8.3. Вычислить криволинейный интеграл

$\oint_l \frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$ вдоль сторон треугольника,образованного прямыми (рис. 8.3):



1) $x = 1$;

2) $y = 1$;

3) $x + y = 1$;

Рис. 8.3

Решение. В данном криволинейном интеграле:

$P(x, y) = -\frac{y}{x^2+y^2}$; $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$;

$Q(x, y) = \frac{x}{x^2+y^2}$; $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$

Выполняется условие $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$. Кроме того, в односвязной области D, ограниченной треугольником, функции $P(x, y), Q(x, y)$ и их частные производные $\frac{\partial P}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}$ определены и непрерывны (точка разрыва *0(0,0)* - вне области D). Следовательно, можно утверждать, что интеграл по замкнутому контуру равен нулю:

$$\oint_l \frac{ydx - xdy}{x^2 + y^2} = 0$$

Условие односвязности области D в сформулированных выше утверждениях существенно. Если это условие не удовлетворяется, то может оказаться, что, несмотря на выполнение равенства $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$,интеграл будет зависеть от пути интегрирования, а интеграл по замкнутому контуру не будет равен нулю.

Пример 8.4. Дано выражение $\left(2xy - \frac{1}{x^2}\right)dx + \left(x^2 - \frac{2}{y^3}\right)dy$.

Доказать, что оно является полным дифференциалом некоторой функции $u(x, y)$ и найти эту функцию с помощью криволинейного интеграла (рис.8.4)

Решение. Здесь

$P(x, y) = 2xy - \frac{1}{x^2}$; $\frac{\partial P}{\partial y} = 2x$;

$Q(x, y) = x^2 - \frac{2}{y^3}$; $\frac{\partial Q}{\partial x} = 2x$.

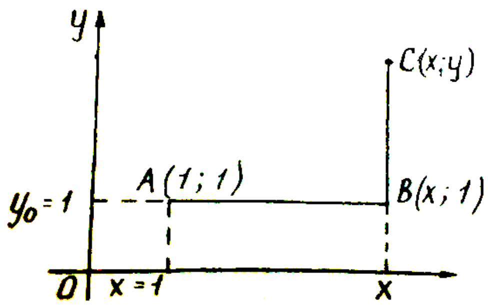


Рис.8.4

Так как выполняется условие $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ и функции $P, Q, \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ определены и непрерывны при всех $x \neq 0, y \neq 0$, то то заданное выражение является полным дифференциалом некоторой функции $u(x, y)$:

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = du$$

Функция $u(x, y)$ может быть вычислена с помощью криволинейного интеграла

$$u(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} P(x, y)dx + Q(x, y)dy + C =$$

$$= \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} \left(2xy - \frac{1}{x^2}\right)dx + \left(x^2 - \frac{2}{y^3}\right)dy + C$$

от точки (x_0, y_0) до точки (x, y) по любой кривой,принадлежащей области *D*.

Прямые $x = 0$ и $y = 0$ являются линиями разрыва функций $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ соответственно. Поэтому область *D* не должна содержать эти прямые или их части. В качестве области возьмем первый квадрант, т.е. множество точек (x, y), для которых $x > 0$ и $y > 0$, например *A (1,1)*, а в качестве пути интегрирования – ломаную *ABC со* сторонами, параллельными координатным осям (рис. 8.4.).

В данной задаче нельзя брать кривую, проходящую через оси Ox или Oy, так как подынтегральная функция не определена при $x = 0$ и $y = 0$. На AB: $y = 1, dy = 0$. На BC: $x = const, dx = 0$.

Поэтому

$$U = \int_{(AB)} \left(2xy - \frac{1}{x^2}\right)dx + \left(x^2 - \frac{2}{y^3}\right)dy + \int_{(BC)} \left(2xy - \frac{1}{x^2}\right)dx +$$

$$+ \left(x^2 - \frac{2}{y^3}\right)dy + C = \int_1^x \left(2xy - \frac{1}{x^2}\right)dx + \int_1^y \left(x^2 - \frac{2}{y^3}\right)dy + C$$

Обозначим переменную интегрирования x через *s*, а переменную интегрирования y − через *t*. Тогда

$$U=\int_1^x\left(2s-\frac{1}{s^2}\right)ds+\int_1^y\left(x^2-\frac{2}{t^3}\right)dt+C=$$

$$=\left(s^2+\frac{1}{s}\right)\Big|_1^x+\left(x^2t-\frac{1}{t^2}\right)\Big|_1^y+C=$$

$$=\left(x^2-\frac{1}{x}\right)-(1+1)+\left(x^2y-\frac{1}{y^2}\right)-(x^2+1)+C=$$

$$=\frac{1}{x}+x^2y+\frac{1}{y^2}+(C-3).$$

Обозначая $C_1=C-3$, получаем окончательно $U=\frac{1}{x}+x^2y+\frac{1}{y^2}+C_1$

Иногда удобно криволинейный интеграл вычислять с помощью двойного интеграла на основе формулы Грина:

$$\oint\limits_l P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\iint\limits_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy,$$

где функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$, а также их частные производные непрерывны в области D и на контуре l, который ее ограничивает, причем контур l проходится в положительном направлении, т.е. так, что область D остается слева.

Вопросы для самопроверки

1. Как определяется криволинейный интеграл по координатам?
2. Что происходит с криволинейным интегралом по координатам, если направление меняется на противоположное?
3. Приведите пример криолинейного интеграла, зависящего от пути интегрирования.
4. Укажите условия независимости криволинейного интеграла от пути интегрирования.
5. Как отыскать первообразную функцию по ее полному дифференциалу с применением криволинейного интеграла?

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА №1

ВАРИАНТЫ 01,11,21,31,41

1. Найти неопределённые интегралы и полученные результаты проверить дифференцированием

Вариант	А	Б
01	$\int \frac{arctg\,\sqrt{x}dx}{\sqrt{x}(1+x)}$	$\int (x^2+1)\ln x\,dx$
11	$\int \frac{dx}{(8x-7)^2+9}$	$\int x \arccos 4x\,dx$
21	$\int \frac{e^x dx}{\sqrt{3-4e^{2x}}}$	$\int \arcsin(2-x)\,dx$
31	$\int \frac{x^3 dx}{x^8-16}$	$\int \frac{(x^2-2x)dx}{e^{3x}}$
41	$\int \frac{x^5 dx}{\sqrt{25^x-4}}$	$\int (3x^2+x-2)\cos 3x\,dx$

2. Найти неопределённый интеграл

Вариант	Задание	Вариант	Задание
01	$\int \frac{dx}{x^3+x^2+2x+2}$	31	$\int \frac{(x^2+x+1)dx}{x^4-2x^2+1}$
11	$\int \frac{(x^3-2x+5)dx}{x^4-1}$	41	$\int \frac{(x^3+x^2-4)dx}{x^4-4x^2}$
21	$\int \frac{(x^3-17)dx}{x^2-4x+3}$		

3. Найти определённый интеграл

Вариант	Задание	Вариант	Задание
01	$\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}}$	31	$\int_1^e \frac{(x^2+\ln x^2)dx}{x}$
11	$\int_1^{\sqrt{3}} \frac{(arctg\,x+x)dx}{1+x^2}$	41	$\int_1^{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{1+x^2}dx}{x^2}$
21	$\int_1^e \frac{1+\ln x dx}{x}$		

4. Вычислить несобственный интеграл или доказать, что он расходится

Вариант	Задание	Вариант	Задание
01	$\int_1^e \frac{dx}{x\ln x}$	31	$\int_0^\infty xe^{-x^2}\,dx$
11	$\int_0^\infty \frac{dx}{x\ln x}$	41	$\int_0^1 \ln x\,dx$
21	$\int_0^\infty \frac{arctg\,xdx}{1+x^2}$		

5. Вычислить несобственный интеграл или доказать, что он расходится

Вариант	Задание	Вариант	Задание
01	$\int_1^e \frac{dx}{x\ln x}$	31	$\int_0^\infty xe^{-x^2}\,dx$
11	$\int_0^\infty \frac{dx}{x\ln x}$	41	$\int_0^1 \ln x\,dx$
21	$\int_0^\infty \frac{arctg\,x dx}{1+x^2}$		

5. Изменить порядок интегрирования и найти полученный кратный интеграл. Область интегрирования изобразить на рисунке.

Вариант	Задание
01	$\int_0^1 dx \int_{\frac{x^2}{4}}^{2\sqrt{x}} x\sqrt{y}dy + \int_1^{2\sqrt{2}} dx \int_{\frac{x^2}{4}}^{2} x\sqrt{y}dy$
11	$\int_1^3 dy \int_0^{2y-2} (x+y)dx + \int_3^7 dy \int_0^{7-y} (x+y)dx$
21	$\int_{\frac{1}{e}}^1 dy \int_{-\ln y}^1 e^x dx + \int_1^2 dy \int_{y-1}^1 e^x dx$
31	$\int_{-1}^0 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} xy^2dy + \int_0^1 dx \int_0^{1-x} xy^2 dy$
41	$\int_0^1 dx \int_0^x (x^2+y^3)dy + \int_1^2 dx \int_0^{2-x} (x^2+y^3)dy$

6. Вычислить объём тела, ограниченного указанными поверхностями.

Вариант	Задание	Вариант	Задание
01	$x^2+y^2=9, y+z=1, z=0$	31	$x^2+y^2=9, z=1-x-y, z=0$
11	$x^2+y^2=9, y+z=1, z=0$	41	$x^2+y^2=16, z=1+x^2, z=0$
21	$x^2+y^2=25, z=x^2+y^2, z=0$		

7. Указать тип дифференциального уравнения и найти его общее решение.

01. $(1+x^2)dy - xydx = 0$

31. $dy + (y+x^2)dx = 0$

11. $xdy + 2ydx = x^3dx$

41. $y' + 6y = e^{-2x}$

21. $y' = \frac{x+y}{x-y}$

8. Найти решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее указанным начальным условиям.

01. $y'' - 4y' + 3y = e^{-2x}$; $y(0) = 0$; $y'(0) = 1$

11. $y''' - y' = \sin x$; $y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$

21. $y'' - 5y' + 6y = sh\, x$; $y(0) = 0$; $y'(0) = 1$

31. $y''' + 5y'' + 6y' = e^{x}$; $y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$

41. $y'' - 7y' + 12y = e^{-2x}$; $y(0) = 0$; $y'(0) = 1$

9. Для вариантов 01, 11 построить график функции $f(t)$; с помощью единичной функции записать ее одним аналитическим выражением и найти ее изображение.

Для вариантов 21, 31, 41 найти свертку заданных оригиналов и изображение свертки по теореме умножения.

01. $f(t) = \begin{cases} 0 \text{ при } t < 0, t > 4; \\ \frac{1}{2} t \text{ при } 0 \le t \le 2; \\ 1 \text{ при } 2 < t < 4 \end{cases}$

21. $\begin{matrix} f_1(t) = \cos t \\ f_2(t) = \sin t \end{matrix}$

31. $\begin{matrix} f_1(t) = e^{2t} \\ f_2(t) = \sin 3t \end{matrix}$

11. $f(t) = \begin{cases} 0 \text{ при } t < 0, t > 2; \\ 2t \text{ при } 0 \le t \le 1; \\ 2 \text{ при } 1 < t < 2 \end{cases}$

41. $\begin{matrix} f_1(t) = t \\ f_2(t) = \sin t \end{matrix}$

10. Исследовать сходимость данных рядов.

01. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}}$; $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{10^n}$

31. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)^3}$; $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$

11. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin n\alpha|}{n^2}$; $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2}$

41. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{3^n}$; $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2-1}$

21. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^2+1}}$; $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$

11. Разложить в ряд Фурье периодическую функцию, определенную на указанном интервале формулой.

Вари-ант	Функция	Пери-од	Вари-ант	Функция	Пери-од
01.	$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-\pi}{2} & \text{при } 0<x<\pi\\ \dfrac{-x-\pi}{2} & \text{при } -\pi<x<0\end{cases}$	2π	31.	$f(x)=\begin{cases}0 \text{ при } -\pi<x\le 0\\ x \text{ при } 0<x<\pi\end{cases}$	2π
11.	$f(x)=\begin{cases}0 \text{ при } 0\le x\le\pi\\ \dfrac{x}{\pi}-2 \text{ при } \pi<x\le 2\pi\end{cases}$	2π	41.	$f(x)=\lvert x\rvert$ при $-\pi<x\le\pi$	2π
21.	$f(x)=2x-3$ при $-\pi<x<\pi$	2π			

12. Для вариантов 01, 11, 21 представить интегралом Фурье функцию $f(t)$.

Для вариантов 31, 41 найти спектральную плотность функции $f(x)$.

00. $f(t)=\begin{cases}2 \text{ при } 0\le t\le 1;\\ 0 \text{ при } t<0, t>1\end{cases}$

31. $f(t)=\begin{cases}e^{-3t} \text{ при } t\ge 0;\\ 0 \quad \text{при } t<0\end{cases}$

11. $f(t)=\begin{cases}1 \text{ при } 0\le t\le 1;\\ 0 \text{ при } t<0, t>1\end{cases}$

41. $f(t)=\begin{cases}0 \text{ при } t>0;\\ -e^{t} \quad \text{при } t\le 0\end{cases}$

21. $f(t)=\begin{cases}e^{-t} \text{ при } t>0;\\ 0 \text{ при } t=0;\\ -e^{t} \quad \text{при } t<0\end{cases}$

ВАРИАНТЫ 02,12,22,32,42

1. Найти неопределённые интегралы и полученные результаты проверить дифференцированием

Вариант	А	Б
02	$\int x\sin(x^2+1)dx$	$\int(7x+1)\sin 2x\,dx$
12	$\int \frac{x\ln(x^2+3)dx}{x^2+3}$	$\int e^{-x}(2-3x)dx$
22	$\int \frac{\sqrt[7]{\ln^2 x}dx}{x}$	$\int \frac{(5x+7)dx}{3^x}$
32	$\int \frac{(\arccos^3 x-1)dx}{\sqrt{1-x^2}}$	$\int(x^5+x^4-6)\log_7 x\,dx$
42	$\int \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt[3]{\sqrt{1+arctg\,x}}}$	$\int x\arcsin 3x\,dx$

2. Найти неопределённый интеграл

Вариант	Задание	Вариант	Задание
02	$\int \frac{dx}{x^3+x^2+x}$	32	$\int \frac{(x+4)dx}{(x^2+2)(x-1)}$
12	$\int \frac{x^2dx}{(x-3)(x+5)}$	42	$\int \frac{dx}{x^2(x+3)}$
22	$\int \frac{dx}{x^3-5x^2+6x}$		

3. Найти определённый интеграл

Вариант	Задание	Вариант	Задание
02	$\int_0^{\frac{1}{4}} \frac{dx}{(4x+1)\sqrt{x}}$	32	$\int_{-\frac{1}{4}}^{0} \arcsin 4x\,dx$
12	$\int_1^2 \frac{(x-1)^3dx}{x^2}$	42	$\int_1^e \frac{(x^2+\ln x^2)dx}{x}$
22	$\int_0^1 (2x+1)e^{-x}dx$		

4. Вычислить несобственный интеграл или доказать, что он расходится

Вариант	Задание	Вариант	Задание
02	$\int_0^2 \frac{dx}{(1-x)^4}$	32	$\int_0^\infty \frac{dx}{x^2(x+2)}$
12	$\int_{-\infty}^1 x5^x dx$	42	$\int_0^\infty \frac{arctg^2\,x dx}{1+x^2}$
22	$\int_0^\infty \frac{(x+1)dx}{x^2+2x+5}$		

5. Вычислить двойной интеграл в заданной области D. Область интегрирования указать на рисунке

Вариант	Задание
02	$\iint_D (18x^2y^2 + 32x^3y^3)dxdy \quad D: y = x; y = -x^2$
12	$\iint_D (6xy + 24x^3y^3)dxdy \quad D: x = 1; y = \sqrt{x}; y = -x^2$
22	$\iint_D (8xy + 9x^2y^2)dxdy \quad D: x = 1; y = \sqrt[3]{x}; y = -x^3$
32	$\iint_D (8xy + 18x^2y^2)dxdy \quad D: x = 1;\ y = \sqrt[3]{x}; y = -x^2$
42	$\iint_D (xy - 4x^3y^3)dxdy \quad D: x = 1; y = x^3; y = 0$

6.Вычислить объём тела, ограниченного указанными поверхностями.

Вариант	Задание	Вариант	Задание
02	$x^2 + y^2 = 1, y + z = 1, z = 0$	32	$x^2 + y^2 = 16, z = 25 - x^2 - y^2, z = 0$
12	$x^2 + y^2 = 9, z = 9 - y, z = 0$	42	$x^2 + y^2 = 1, y = x, y = 0, z = 0$
22	$z = 4 - x^2 - y^2, z = 0$		

7. Указать тип дифференциального уравнения и найти его общее решение.

02. $xdy + ydx = (\ln x + 1)dx$

12. $y' = \frac{x+y}{x-y}$

22. $(x^2 - 1)y' - xy = x^3 - x$

32. $dy + (y + x^2)dx = 0$

42. $(x^2 - y^2)dy - 2xydx = 0$

8. Найти решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее указанным начальным условиям.

02. $y'' - 4y' + 5y = 0;$ $\quad y(0) = 0;\ y'(0) = 1$

12. $y'' - 9y' + 14y = sh\, x;$ $\quad y(0) = 0;\ y'(0) = 1$

22. $y''' + 5y'' + 6y' = e^x;$ $\quad y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$

32. $y''' + 4y' = 1;$ $\quad y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$

42. $y'' - 4y' + 5y = 0;$ $\quad y(0) = 0;\ y'(0) = 1$

9. Найти оригинал по его изображению $F(p)$.

02. $F(p) = \frac{p+5}{p^2+2p+10}$

32. $F(p) = \frac{e^{-p}}{p^2-p+1}$

12. $F(p) = e^{-\frac{p}{2}} \frac{3p-1}{p^2-4p+7}$

42. $F(p) = e^{-\frac{3p}{2}} \frac{p-1}{p^2-p+1}$

22. $F(p) = \frac{p^2 e^{-p}}{(p^2+1)}$

10. Определить область сходимости ряда.

02. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{3^n\sqrt{n+1}}$

32. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-x)^{n-1}}{2^n n^2}$

12. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^n}{(2n+1)}$

42. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1} n!\, x^n}{(2n)!}$

22. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{3^{n-1} n}$

11. Разложить в ряд Фурье периодическую функцию, определенную на указанном интервале формулой.

Вариант	Функция	Период	Вариант	Функция	Период
02.	$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } 0 < x \le \pi \\ \frac{x}{\pi} - 2 \text{ при } \pi < x < 2\pi \end{cases}$	2π	22.	$f(x) = \lvert x \rvert - 5$ при $-2 < x < 2$	4
			32.	$f(x) = 5x - 1$ при $-5 < x < 5$	10
12.	$f(x) = \begin{cases} -U \text{ при } 0 < x < \pi \\ U \text{ при } \pi < x < 2\pi \end{cases}$	2π	42.	$f(x) = 3 - \lvert x \rvert$ при $-5 < x < 5$	10

12. Для вариантов 02, 12, 22 представить интегралом Фурье функцию $f(t)$.

01. $f(t) = \begin{cases} 1 \text{ при } 0 \le t \le \tau; \\ 0 \text{ при } t \le 0, t > \tau \end{cases}$

32. $f(t) = \begin{cases} 0 \text{ при } t < 0; \\ 2 \text{ при } 0 \le t \le 1; \\ 0 \text{ при } t > 1 \end{cases}$

12. $f(t) = \begin{cases} 1 - \frac{t}{2} \text{ при } 0 \le t \le 2; \\ 0 \text{ при } t < 0, t > 2 \end{cases}$

42. $f(t) = \begin{cases} 2e^{-t} \text{ при } t \ge 0; \\ 0 \text{ при } t < 0 \end{cases}$

22. $f(t) = \begin{cases} 1 \text{ при } |t| < 1; \\ \frac{1}{2} \text{ при } |t| = 1; \\ 0 \text{ при } |t| > 1 \end{cases}$

ВАРИАНТЫ 03,13,23,33,43

1. Найти неопределённые интегралы и полученные результаты проверить дифференцированием

Вариант	А	Б
03	$\int \frac{xdx}{(7+4x^2)^3}$	$\int arctg\, x\, dx$
13	$\int \frac{e^{\frac{1}{x^3}}dx}{x^4}$	$\int x^2 \cos 2x\, dx$
23	$\int x\sqrt[7]{8-x^2}dx$	$\int \arcsin x\, dx$
33	$\int \frac{e^x dx}{9+4e^{2x}}$	$\int (x-4)\arccos x\, dx$
43	$\int \frac{dx}{(1+x^2)arctg^3\, x}$	$\int (x^2+7)\sin 2x\, dx$

2. Найти неопределённый интеграл

Вариант	Задание	Вариант	Задание
03	$\int \frac{(3x^3+25)dx}{x^2+3x+2}$	33	$\int \frac{(x^3-2x+5)dx}{x^4-1}$
13	$\int \frac{(x^3+2x+1)dx}{x^3+x}$	43	$\int \frac{(x^3-17)dx}{x^2-4x+3}$
23	$\int \frac{dx}{x^3-8}$		

3. Найти определённый интеграл

Вариант	Задание	Вариант	Задание
03	$\int_0^{\sqrt{3}} \frac{(arctg\, x+x)dx}{1+x^2}$	33	$\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{\sqrt{1-x^2}dx}{x^2}$
13	$\int_1^{e^2} \frac{dx}{x\sqrt{2+\ln x}}$	43	$\int_0^{\pi} \sin 3x \cos 7x\, dx$
23	$\int_3^6 \sqrt{6x-x^2}dx$		

4. Вычислить несобственный интеграл или доказать, что он расходится

Вариант	Задание	Вариант	Задание
03	$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2}$	33	$\int_2^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$
13	$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x\ln x}$	43	$\int_0^{\infty} e^{-\frac{x}{2}}dx$
23	$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x}dx$		

5. Изменить порядок интегрирования и найти полученный кратный интеграл. Область интегрирования изобразить на рисунке.

Вариант	Задание
03	$\int_{\frac{1}{e}}^{1} dy \int_{-\ln y}^{1} chx\,dx + \int_{1}^{e} dy \int_{\ln y}^{1} chx\,dx$
13	$\int_{-2}^{0} dy \int_{-1}^{y+1} \sqrt{x}y dx + \int_{0}^{1} dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} \sqrt{x}y dx$
23	$\int_{0}^{1} dy \int_{-1}^{0} ye^x dx + \int_{1}^{e} dy \int_{-1}^{-\ln y} ye^x dx$
33	$\int_{1}^{3} dy \int_{0}^{2} (x^2+y) dx + \int_{3}^{4} dy \int_{0}^{\sqrt{4}-y} (x^2+y) dx$
43	$\int_{0}^{1} dx \int_{0}^{x} xy^2 dy + \int_{1}^{2} dx \int_{0}^{2-x} xy^2 dy$

6. Вычислить объём тела, ограниченного указанными поверхностями.

Вариант	Задание	Вариант	Задание
03	$x^2+y^2=9,\ y+z=1,\ z=0$	33	$z=16-x^2-y^2,\ z=0$
13	$z=4-x^2-y^2, z=0$	43	$x^2+y^2=25, z=x^2+y^2,\ z=0$
23	$x^2+y^2=4,\ z=y^2,\ z=0$		

7. Указать тип дифференциального уравнения и найти его общее решение.

02. $x\frac{dy}{dx} - y = \sqrt{x^2+y^2}$

13. $xdy + ydx = (\ln x + 1)dx$

23. $y' = \frac{2x+3y}{4x-5y}$

33. $dy + 4ydx = 2xdx$

43. $y' = \frac{y}{x} + tg\ \frac{y}{x}$

8. Найти решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее указанным начальным условиям.

03. $y''' - 3y' + 2y = e^{2x}$; $y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$

13. $y''' + y' = \sin 2x$; $y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$

23. $y'' - 4y' + 3y = \sin 2x$; $y(0) = y'(0) = 0$

33. $y'' - 3y' + 2y = e^{-2x}$; $y(0) = 0;\ y'(0) = -1$

43. $y''' + 3y'' - 4y = 0$; $y(0) = y'(0) = 0; y''(0) = 1$

9. Для вариантов 03, 13 построить график функции $f(t)$; с помощью единичной функции записать ее одним аналитическим выражением и найти ее изображение.

Для вариантов 23, 33, 43 найти изображения оригинала, используя теорему смещения.

03. $f(t) = \begin{cases} 0 \text{ при } t < 0, t > 4; \\ \frac{1}{2}t \text{ при } 0 \le t \le 2; \\ 1 \text{ при } 2 < t < 4 \end{cases}$

23. $e^{-3t}\cos^2 t$

33. $e^{-t}\cos^2 2\,t$

13. $f(t) = \begin{cases} 0 \text{ при } t < 0, t > 2; \\ 2t \text{ при } 0 \le t \le 1; \\ 2 \text{ при } 1 < t < 2 \end{cases}$

43. $ch\, t \cdot \sin 2t \cdot \sin 3t$

10. Исследовать сходимость данных рядов.

03. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n-1}}; \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{(n+1)!}$

33. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n5^{n-1}}; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{2n-1}}$

13. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(5n-4)(6n-5)}; \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2}$

43. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{3^n}; \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^3-1}$

23. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n+2}{(n^3-1)^2}; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$

11. Разложить в ряд Фурье периодическую функцию, определенную на указанном интервале формулой.

Вари-ант	Функция	Период	Вари-ант	Функция	Период
03.	$f(x) = 2x - 3$ при $-\pi < x < \pi$	6	33.	$f(x) = \begin{cases} 1 \text{ при } -1 \le x < 0 \\ x \text{ при } 0 < x \le 1 \end{cases}$	2
13.	$f(x) = \begin{cases} 1 - x \text{ при } 0 < x < 1 \\ 0 \text{ при } 1 < x < 2 \end{cases}$	2	43.	$f(x) = \begin{cases} U_0 \text{ при } -\frac{\tau}{2} < t \le \frac{\tau}{2} \\ 0 \text{ при } \frac{\tau}{2} < t \le \frac{T}{2} \\ \quad -\frac{T}{2} < t \le -\frac{\tau}{2} \end{cases}$	T $(\tau < T)$
23.	$f(x) = \begin{cases} -\pi - x \text{ при } -\pi < x \le -\frac{\pi}{2} \\ x \text{ при } -\frac{\pi}{2} < x \le \frac{\pi}{2} \\ \pi - x \text{ при } \frac{\pi}{2} < x \le \pi \end{cases}$	2π			

12. Для вариантов 01, 11, 21 представить интегралом Фурье функцию $f(t)$.

Для вариантов 33, 43 найти спектральную плотность функции $f(t)$

03. $f(t) = \begin{cases} 1 \text{ при } 0 \le t \le 1; \\ 0 \text{ при } t < 0, t > 1 \end{cases}$

33. $f(t) = \begin{cases} 0 \text{ при } t > 0; \\ -e^{t} \text{ при } t \le 0 \end{cases}$

13. $f(t) = \begin{cases} e^{-t} \text{ при } t > 0; \\ 0 \text{ при } t = 0; \\ -e^{t} \text{ при } t < 0 \end{cases}$

43. $f(t) = \begin{cases} 1 - t \text{ при } 0 \le t \le 1; \\ t + 1 \text{ при } -1 \le t < 0; \\ 0 \text{ при } |t| > 1 \end{cases}$

23. $f(t) = \begin{cases} 0 \text{ при } t < 0; \\ \pi t \text{ при } 0 \le t \le 1; \\ 0 \text{ при } t > 1 \end{cases}$

ВАРИАНТЫ 04,14,24,34,44

1. Найти неопределённые интегралы и полученные результаты проверить дифференцированием

Вариант	А	Б
04	$\int \frac{\sqrt[3]{8+3\ln x}dx}{x}$	$\int arctg\,\sqrt{x}\,dx$
14	$\int e^{3\sin^2 x}\sin 2x\,dx$	$\int \ln x\,dx$
24	$\int \frac{e^x dx}{e^x+e^{-x}}$	$\int (\mathrm{x}^2+7)\arccos x\,dx$
34	$\int \frac{(x+\cos x)dx}{x^2+2\sin x}$	$\int x^2 e^{-\frac{x}{2}}dx$
44	$\int \frac{(1-\cos x)dx}{(x-\sin x)^2}$	$\int \sqrt{x}\ln x\,dx$

2. Найти неопределённый интеграл

Вариант	Задание	Вариант	Задание
04	$\int \frac{(x^2+x+1)dx}{x^4-2x^2+1}$	34	$\int \frac{(x+1)dx}{x^2+4x^4}$
14	$\int \frac{(x^3+x^2-4)dx}{x^4-4x^2}$	44	$\int \frac{(2x^3+1)dx}{x^3-1}$
24	$\int \frac{(x^4-3)dx}{x^4-1}$		

3. Найти определённый интеграл

Вариант	Задание	Вариант	Задание
04	$\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}dx$	34	$\int_0^{\pi} \sin 7x\cos 3x\,dx$
14	$\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dx}{x^2\sqrt{1-x^2}}$	44	$\int_1^e \frac{\sqrt[4]{1+\ln x}dx}{x}$
24	$\int_0^{2\pi} \sin^2 3x\cos^2 3x\ \,dx$		

4. Вычислить несобственный интеграл или доказать, что он расходится

Вариант	Задание	Вариант	Задание
04	$\int_{-\infty}^0 \frac{dx}{x^2+x+3}$	34	$\int_{-4}^0 \frac{dx}{x+2}$
14	$\int_0^{\infty} xe^{-\frac{x^2}{2}}dx$	44	$\int_0^1 \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$
24	$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2+x}$		

5. Вычислить двоичный интеграл в задануой области D. Область интегрирования указать на рисунке

Вариант	Задание
04	$\iint_D (xy - 4x^3y^3)dxdy \quad D: x = 1; y = x^3; y = 0$
14	$\iint_D (xy - 10x^4y^4)dxdy \quad D: x = 1; y = \sqrt[3]{x}; y = -x^2$
24	$\iint_D (12x^2y^2 + 16x^3y^3)dxdy \quad D: x = 1; y = x^2; y = -\sqrt{x}$
34	$\iint_D (8xy + 9x^2y^2)dxdy \quad D: x = 1;\ y = \sqrt[3]{x}; y = -x^3$
44	$\iint_D (4x^3y^3 + xy)dxdy \quad D: y = x^2; y = \sqrt{x}$

6. Вычислить объём тела, ограниченного указанными поверхностями.

Вариант	Задание	Вариант	Задание
04	$x^2 + y^2 = 9, z = \frac{x^2}{4},$ $z = 0$	34	$x^2 + y^2 = 4, z = 0$
14	$x^2 + y^2 = 25,$ $z = x^2 + y^2, z = 0$	44	$x^2 + y^2 = 1, y + z = 1, z = 0$
24	$z = 25 - x^2 - y^2, z = 0$		

7. Указать тип дифференциального уравнения и найти его общее решение.

04. $\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = \frac{x+1}{x}$

34. $\frac{y'}{x^2} - 3y = 1$

14. $y' = 2\sin x + 3y$

44. $xydy = (x^2 + y^2)dx$

24. $dy + 4ydx = 2xdy$

8. Найти решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее указанным начальным условиям.

04. $y''' + y' = e^{2x}$; $\quad y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$

14. $y'' + 3y' = \cos x$; $\quad y(0) = y'(0) = 0$

24. $y'' + 4y' + 13y = 0$; $\quad y(0) = 0;\ y'(0) = 1$

34. $y''' + y' = e^{2x}$; $\quad y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$

44. $y''' + 4y' = 1$; $\quad y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$

9. Для вариантов 04, 14 найти изображения оригинала $f(t)$ с периодом T (построить график $f(t)$), заданного на интервале – периоде.

Для вариантов 24, 34, 44 найти изображения оригинала, используя теорему смещения.

04. $f(t) = \begin{cases} t\,,\ 0 \le t < 1; \\ 2 - t\,,\ 1 \le t < 2,\ T = 2 \end{cases}$

14. $f(t) = \begin{cases} 2t\,,\ 0 \le t < 2; \\ 0\,,\ 2 \le t < 4,\ T = 4 \end{cases}$

24. $e^{-3t}\, sin^2\, t$

34. $e^{-2t}\, cos^2 3\, t$

44. $sh\ t\cdot cos\ 2t\cdot cos\ 3t$

10. Определить область сходимости ряда.

04. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n-1}}{3^n\sqrt{n+1}}$

14. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{4^n n^2}$

24. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{4^{n-1}(n+1)}$

34. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n(n+1)!x^n}{3^n}$

44. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n x^n}{(n+1)!}$

11. Разложить в ряд Фурье периодическую функцию, определенную на указан ном интервале формулой.

Вари-ант	Функция	Пери-од	Вари-ант	Функция	Период
04.	$f(x) = 2x + 3$ при $-\pi < x < \pi$	2π	34.	$f(t) = \begin{cases} \frac{x-\pi}{2} \text{ при } 0 < x < \pi \\ -\frac{x-\pi}{2} \text{ при } -\pi < x < 0 \end{cases}$	2π
14.	$f(x) = 5x - 2$ при $-\pi < x < \pi$	2π	44.	$f(t) = \begin{cases} U_0 \text{ при } 0 < x \le \pi \\ -U_0 \text{ при } \pi < x \le 2\pi \end{cases}$	2π
24.	$f(x) = -\frac{x}{\pi}$ при $0 < x < \pi$	π			

12. Для вариантов 04, 14, 24 представить интегралом Фурье функцию $f(t)$.

Для вариантов 34, 44 найти спектральную плотность функции $f(t)$.

04. $$f(t) = \begin{cases} 1 \text{ при } |t| < 1; \\ \frac{1}{2} \text{ при } |t| = 1; \\ 0 \text{ при } |t| > 1 \end{cases}$$

34. $$f(t) = \begin{cases} \cos t \text{ при } |t| \le \frac{\pi}{2}; \\ 0 \text{ при } |t| > \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

14. $$f(t) = \begin{cases} t - 1 \text{ при } 0 \le t \le 1; \\ 0 \text{ при } t < 0, t > 1 \end{cases}$$

44. $$f(t) = \begin{cases} 0 \text{ при } t < 0; \\ 2 \text{ при } 0 \le t \le 1; \\ 0 \text{ при } t > 1 \end{cases}$$

24. $$f(t) = \begin{cases} e^{-t} \text{ при } 0 < t \le 1; \\ e^{t} \text{ при } -1 \le t \le 0; \\ 0 \text{ при } |t| > 1 \end{cases}$$

ВАРИАНТЫ 05,15,25,35,45

1. Найти неопределённые интегралы и полученные результаты проверить дифференцированием

Вариант	А	Б
05	$\int tg\, x \ln\lvert\cos x\rvert\, dx$	$\int \sqrt{4-x^2}dx$
15	$\int \frac{arctg\,\sqrt{x}dx}{\sqrt{x}(1+x)}$	$\int x^2 e^{\frac{x}{2}}dx$
25	$\int x^2 \sqrt[3]{1+x}dx$	$\int (x^2+3)\sin 2x\, dx$
35	$\int \frac{\sin x dx}{\sqrt{2+\cos^2 x}}$	$\int \frac{xdx}{e^{2x}}$
45	$\int \frac{(1-\cos x)dx}{(x-\sin x)^2}$	$\int x \ln x(1+x^2)\, dx$

2. Найти неопределённый интеграл

Вариант	Задание	Вариант	Задание
05	$\int \frac{(x^5+3x^3-1)dx}{x^2+x}$	35	$\int \frac{dx}{x^4+9x^2}$
15	$\int \frac{(3-x)dx}{16-x^4}$	45	$\int \frac{(x^5-9x^3-4)dx}{x^2+3x}$
25	$\int \frac{(x+2)dx}{x^4-2x^3+2x^2}$		

3. Найти определённый интеграл

Вариант	Задание	Вариант	Задание
05	$\int_{25}^{49} \frac{\sqrt{x}dx}{x-9}$	35	$\int_3^4 \frac{dx}{x\sqrt{25-x^2}}$
15	$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 2x\, dx$	45	$\int_4^9 \frac{dx}{\sqrt{x}(x-1)}$
25	$\int_1^{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{1+x^2}dx}{x^2}$		

4. Вычислить несобственный интеграл или доказать, что он расходится

Вариант	Задание	Вариант	Задание
05	$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2}$	35	$\int_e^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$
15	$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2+x}$	45	$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x\ln x}$
25	$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x}dx$		

5. Изменить порядок интегрирования и найти полученный кратный интеграл. Область интегрирования изобразить на рисунке.

Вариант	Задание
05	$\int_0^1 dx \int_{\frac{x^2}{4}}^{2\sqrt{x}} (x+y)dy + \int_1^{2\sqrt{2}} dx \int_{\frac{x^2}{4}}^{2} (x+y)dy$
15	$\int_1^3 dy \int_0^{2y-2} xydx + \int_3^7 dy \int_0^{7-y} xydx$
25	$\int_{\frac{1}{e}}^1 dy \int_{-\ln y}^1 y^2dx + \int_1^2 dy \int_{y-1}^1 y^2dx$
35	$\int_{-1}^0 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} x\sqrt{y}dy + \int_0^1 dx \int_0^{1-x} x\sqrt{y}dy$
45	$\int_0^1 dx \int_0^{x^2} (x+y^2)dy + \int_1^3 dx \int_0^{\frac{3-x}{2}} (x+y^2)dy$

6. Вычислить объём тела, ограниченного указанными поверхностями.

Вариант	Задание	Вариант	Задание
05	$x^2+y^2=1,$ $y=x, y=0, z=0$	35	$x+y+z=4, x=x,$ $y=0, z=0$
15	$x^2+y^2=4, y+z=2, z=0$	45	$z=9-x^2-y^2, z=0$
25	$x^2+y^2=25,$ $z=x^2+y^2, z=0$		

7. Указать тип дифференциального уравнения и найти его общее решение.

05. $\frac{1}{x^2}y' - 3y = 1$

15. $xe^xy' + ye^x = 1$

25. $(1-x^2)dy + xydx = dx$

35. $y' - \frac{2x}{1+x^2}y = 1 + x^2$

45. $y' = \frac{2x+3y}{4x-5y}$

8. Найти решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее указанным начальным условиям.

05. $y''' + y' = e^{2x}$; $\quad y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$

15. $y''' + y' = e^{x}$; $\quad y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$

25. $y''' - y'' = \cos x$; $\quad y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$

35. $y'' - 9y' + 14y = sh\, x$; $\quad y(0) = 0;\ y'(0) = 0$

45. $y''' - 3y' + 2y = e^{2x}$; $\quad y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$

9. Для вариантов 05, 15 построить график функции $f(t)$ с помощью единичной функции записать ее одним аналитическим выражением и найти ее изображение.

Для вариантов 25, 35, 45 найти изображения оригинала, используя теорему об интегрировании изображения.

05. $f(t) = \begin{cases} t \text{ при } 0 \le t \le 2; \\ 4 - t, \text{при } 2 < t \le 4; \\ 0 \text{ при } t > 4;\ t < 0 \end{cases}$

15. $f(t) = \begin{cases} 0 \text{ при } t < 2;\ t > 6; \\ 3 \text{ при } 2 \le t \le 4; \\ \frac{1}{2} \text{ при } 4 < t < 6 \end{cases}$

25. $\frac{\cos 2t - \cos 3t}{t}$

35. $\frac{\operatorname{ch} 2t - \operatorname{ch} 5t}{t}$

45. $\frac{e^{3t} - \cos 2t}{t}$

10. Исследовать сходимость данных рядов.

05. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n+5}; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{3^n(4n-1)}$

15. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\cos n\alpha|}{n^3}; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4n+5}}$

25. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(n+1)^3}; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+4}$

35. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+4)^3}; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{3n-2}}$

45. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+2)}{4^n}; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n^5+1}}$

11. Разложить в ряд Фурье периодическую функцию, определенную на указанном интервале формулой.

Вариант	Функция	период	Вариант	Функция	Период
05.	$f(x) = \begin{cases} \frac{2x}{\pi} \text{ при } 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ \frac{2}{\pi}(\pi - x) \text{ при } \frac{\pi}{2} < x \le \pi \end{cases}$	π	25.	$f(x) = \begin{cases} \frac{2x}{\pi} \text{ при } 0 < x \le \frac{\pi}{2} \\ \frac{2}{\pi}(\pi - x) \text{ при } \frac{\pi}{2} < x \le \pi \end{cases}$	π
			35.	$f(x) = \begin{cases} 2 \text{ при } -1 < x \le 0 \\ x \text{ при } 0 < x \le 1 \end{cases}$	2
15.	$f(x) = \begin{cases} \frac{x-\pi}{2} \text{ при } 0 < x < \pi \\ -\frac{x-\pi}{2} \text{ при } -\pi < x < 0 \end{cases}$	2π	45.	$f(x) = x - 2$ при $0 < x \le 2\pi$	2π

12. Для вариантов 05, 15, 25 представить интегралом Фурье функцию $f(t)$.

Для вариантов 35, 45 найти спектральную плотность функции $f(t)$

05. $f(t) = \begin{cases} 0 \text{ при } t < 0; \\ \pi t \text{ при } 0 \le t \le 1; \\ 0 \text{ при } t > 1 \end{cases}$

15. $f(t) = \begin{cases} t \text{ при } |t| \le 1; \\ 0 \text{ при } |t| > 1 \end{cases}$

25. $f(t) = \begin{cases} |t| \text{ при } t \le 1; \\ 0 \text{ при } |t| > 1 \end{cases}$

35. $f(t) = \begin{cases} 3e^{-t} \text{ при } t \ge 0; \\ 0 \text{ при } t < 0 \end{cases}$

45. $f(t) = \begin{cases} \sin t \text{ при } t \le \frac{\pi}{2}; \\ 0 \text{ при } |t| > \frac{\pi}{2} \end{cases}$

ВАРИАНТЫ 06,16,26,36,46

1. Найти неопределённые интегралы и полученные результаты проверить дифференцированием

Вариант	А	Б
06	$\int \frac{3^{\sqrt{x}}dx}{\sqrt{x}}$	$\int (3-2x^2)\cos x\,dx$
16	$\int \frac{dx}{(1+x^2)arctg^3\,x}$	$\int \frac{(x-2)dx}{3^x}$
26	$\int \frac{(1-\sqrt[5]{\arcsin^3 x})dx}{\sqrt{1-x^2}}$	$\int \frac{(x^2-x-1)dx}{2^x}$
36	$\int \frac{e^x dx}{e^x+e^{-x}}$	$\int x\,arctg\,xdx$
46	$\int \frac{\sqrt[3]{8+3\ln x}dx}{x}$	$\int \frac{xdx}{\cos^2\frac{x}{2}}$

2. Найти неопределённый интеграл

Вариант	Задание	Вариант	Задание
06	$\int \frac{x^2dx}{(x-3)(x+5)}$	36	$\int \frac{(5x+1)dx}{(4x^2+4x+1)(x-1)}$
16	$\int \frac{xdx}{x^3+27}$	46	$\int \frac{(x^3-2x+5)dx}{x^4-1}$
26	$\int \frac{(x+4)dx}{(x^2+2)(x-1)}$		

3. Найти определённый интеграл

Вариант	Задание	Вариант	Задание
06	$\int_1^{e^2} \frac{dx}{x\sqrt{2+\ln x}}$	36	$\int_1^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x dx}{9+16\cos^2 x}$
16	$\int_0^1 (2x+1)e^{-x}dx$	46	$\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+1}}$
26	$\int_1^5 \frac{dx}{3x-2}$		

4. Вычислить несобственный интеграл или доказать, что он расходится

Вариант	Задание	Вариант	Задание
06	$\int_0^{\infty} xe^{-x^2}dx$	36	$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx$
16	$\int_e^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$	46	$\int_e^{\infty} \frac{dx}{x\ln x}$
26	$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{4+x^2}$		

5. Вычислить двойной интеграл в заданной области D. Область интегрирования указать на рисунке.

Вариант	Задание
06	$\iint_D (18x^2y^2 + 32x^3y^3)dxdy \;\; D: x = 1; y = x^3; y = -\sqrt[3]{x}$
16	$\iint_D (xy - 4x^3y^3)dxdy \;\; D: x = 1; y = x^3; y = 0$
26	$\iint_D (6xy + 24x^3y^3)dxdy \;\; D: x = 1; y = \sqrt{x}; y = -x^2$
36	$\iint_D (17xy + 9x^3y)dxdy \;\; D: y = x^2;\; y = \sqrt{x}$
46	$\iint_D (5xy + 4x^2y^2)dxdy \;\; D: x = 1; y = x^3; y = -\sqrt{x}$

6. Вычислить объём тела, ограниченного указанными поверхностями.

Вариант	Задание	Вариант	Задание
06	$x^2 + y^2 = 9, z = \frac{x^2}{4},$ $z = 0$	36	$x^2 + y^2 = 4,$ $z = y^2, z = 0$
16	$x^2 + y^2 = 9,$ $z = 1 - x - y, z = 0$	46	$z = 9 - x^2 - y^2, z = 0$
26	$z = 16 - x^2 - y^2, z = 0$		

7. Указать тип дифференциального уравнения и найти его общее решение.

06. $(x^2 - 1)y' - xy = x^3 - x$

16. $\frac{dy}{dx} + \frac{2}{x}y = x^3$

26. $dy + aydx = kxdy$

36. $y' + 10y = e^{-6x}$

46. $y' = \frac{x+y}{3x-5y}$

8. Найти решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее указанным начальным условиям.

06. $y'' + 4y = 4e^x$; $\quad y(0) = 4;\ y'(0) = 0$

16. $y''' + 4y' = 1$; $\quad y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$

26. $y'' + 4y' + 13y = 0$; $\quad y(0) = 0; y'(0) = 1$

36. $y'' + 9y' = \cos x$; $\quad y(0) = y'(0) = 0$

46. $y''' + y' = e^{2x}$; $\quad y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$

9. Для вариантов 06, 16, 26 найти изображение оригинала $f(t)$ с периодом T, заданного на интервале-периоде. Построить график $f(t)$

Для вариантов 36, 46 найти изображения оригинала, используя теорему об интегрировании изображения.

06. $f(t) = 2t\ \ 0 \le t < 1, T = 1$

16. $f(t) = \begin{cases} t \text{ при } 0 \le t \le 1; \\ 2 - t \text{ при } 1 < t < 2, T = 2 \end{cases}$

26. $f(t) = \sin t,\ T = \pi$

36. $\frac{ch\,2t-1}{t}$

46. $\frac{cos2t-ch\,5t}{t}$

10. Определить область сходимости ряда.

06. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^{n-1}}$

16. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^n}{(2n+1)}$

26. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n(-x)^n}{\sqrt[3]{n^2+4}}$

36. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n(n+1)!x^n}{3^n}$

46. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!x^n}{4^n}$

11. Разложить в ряд Фурье периодическую функцию, определенную на указанном интервале формулой.

а ри- а нт	Функция	Пери-од	Вари-ант	Функция	Период
06.	$f(x) = 3x + 1$ при $-\pi < x < \pi$	2π	36.	$f(x) = 5x - 1$ при $-5 < x < 5$	10
16.	$f(x) = 5x - 2$ при $-\pi < x < \pi$	2π	46.	$f(x) = 5x + 2$ при $-\pi < x < \pi$	2π
26.	$f(x) = \begin{cases} -\pi - x \text{ при } -\pi \le x \le -\frac{\pi}{2} \\ x \text{ при } -\frac{\pi}{2} < x \le \frac{\pi}{2} \\ \pi - x \text{ при } \frac{\pi}{2} < x \le \pi \end{cases}$	2π			

12. Для вариантов 06, 16, 26 представить интегралом Фурье функцию $f(t)$.

Для вариантов 36, 46 найти спектральную плотность функции .

06. $f(t) = \begin{cases} e^{-t} \text{ при } 0 < t \le 1; \\ e^{t} \text{ при } -1 \le t \le 0; \\ 0 \text{ при } |t| > 1 \end{cases}$

16. $f(t) = \begin{cases} 1 \text{ при } 0 \le t \le \tau; \\ 0 \text{ при } t < 0, t > \tau \end{cases}$

26. $f(t) = \begin{cases} |t| \text{ при } t < 1; \\ 0 \text{ при } |t| > 1 \end{cases}$

36. $f(t) = \begin{cases} 0 \text{ при } t > 0; \\ -2e^{t} \text{ при } t \le 0 \end{cases}$

46. $f(t) = e^{-|t|}, \ -\infty < t < \infty$

ВАРИАНТЫ 07,17,27,37,47

1. Найти неопределённые интегралы и полученные результаты проверить дифференцированием

Вариант	А	Б
07	$\int ch^2\, xdx$	$\int \frac{xdx}{e^{2x}}$
17	$\int \sqrt{3^{\ln x}}\frac{dx}{x}$	$\int arctg\sqrt{x}dx$
27	$\int \frac{x^2dx}{3+x^3}$	$\int \frac{xdx}{ch^2 x}$
37	$\int \frac{dx}{x\ln x}$	$\int x\, arctg\frac{x}{5}dx$
47	$\int \frac{sh\, xdx}{\sqrt{ch\, 2x}}$	$\int x^2 e^{-\frac{x}{2}}dx$

2. Найти неопределённый интеграл

Вариант	Задание	Вариант	Задание
07	$\int \frac{(2x^4+1)dx}{x^3+x^2+2x+2}$	37	$\int \frac{xdx}{x^3+27}$
17	$\int \frac{(3+2x)dx}{(x+2)(x^2-4)}$	47	$\int \frac{(x^5+3x^3-1)dx}{x^2+x}$
27	$\int \frac{(3x^2-2)dx}{x(x+2)^2}$		

3. Найти определённый интеграл

Вариант	Задание	Вариант	Задание
07	$\int_3^6 \sqrt{6x-x^2}dx$	37	$\int_0^1 \frac{x^3dx}{\sqrt{1+x^2}}$
17	$\int_0^{\pi} \sin 7x \cos 3x\, dx$	47	$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{xdx}{\cos^2 x}$
27	$\int_0^{\sqrt{3}} \frac{(arctg\, x+x)dx}{1+x^2}$		

4. Вычислить несобственный интеграл или доказать, что он расходится

Вариант	Задание	Вариант	Задание
07	$\int_1^3 \frac{dx}{x-2}$	37	$\int_0^1 \frac{2^{\frac{1}{x}}dx}{x^2}$
17	$\int_{-\infty}^0 xe^{5x}dx$	47	$\int_{-1}^0 \frac{dx}{\sqrt{x+1}}$
27	$\int_0^{\infty} \frac{arctg\, xdx}{1+x^2}$		

5. Изменить порядок интегрирования и найти полученный кратный интеграл. Область интегрирования изобразить на рисунке.

Вариант	Задание
07	$\int_0^4 dy \int_0^3 \sqrt{x}y dx + \int_4^5 dy \int_0^{\sqrt{25-y^2}} \sqrt{x}y dx$
17	$\int_{\frac{1}{e}}^1 dy \int_{-\ln y}^1 shx\, dx + \int_1^e dy \int_{\ln y}^1 shx\, dx$
27	$\int_{-2}^0 dy \int_{-1}^{y+1} xy dx + \int_0^e dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} xy dx$
37	$\int_1^3 dx \int_0^{\frac{x-1}{2}} (x+y) dy + \int_3^4 dx \int_0^{\sqrt{4-x}} (x+y) dy$
47	$\int_1^2 dx \int_2^{x+1} e^x dy + \int_2^5 dx \int_2^3 e^x dy$

6. Вычислить объём тела, ограниченного указанными поверхностями.

Вариант	Задание	Вариант	Задание
07	$x^2 + y^2 = 4,$ $z = 4 + x, z = 0$	37	$x^2 + y^2 = 9,$ $y + z = 3, z = 0$
17	$x^2 + y^2 = 9, z = \frac{x^2}{2},$ $z = 0$	47	$z = 4 - x^2 - y^2, z = 0$
27	$x^2 + y^2 = 16,$ $z = 25 - x^2 - y^2, z = 0$		

7. Указать тип дифференциального уравнения и найти его общее решение.

07. $\frac{dy}{dx} = -\frac{3x^2+6xy+3y^2}{2x^2+3xy}$

17. $xdy + 2ydx = x^3dx$

27. $y' - y = e^{10x}$

37. $xdy - 3ydx = (x+1)dx$

47. $dy + cydx = axdy$

8. Найти решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее указанным начальным условиям.

07. $y'' + 4y = 4e^{x}$; $y(0) = 4;\ y'(0) = 0$

17. $y'' + 4y = e^{3x}$; $y(0) = y'(0) = 2$

27. $y'' - 9y' + 14y = sh\, x$; $y(0) = 0; y'(0) = 0$

37. $y''' - 3y' + 2y = e^{2x}$; $y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$

47. $y'' - 4y' + 5y = 0$; $y(0) = -1;\ y'(0) = 1$

9. Для вариантов 07, 17, 27 найти изображение оригинала $f(t)$ с периодом T, заданного на интервале-периоде. Построить график $f(t)$

Для вариантов 37, 47 найти изображения, используя теорему смещения .

07. $f(t) = 2t \ \ 0 \le t < 1, T = 1$

17. $f(t) = \begin{cases} t & \text{при } 0 \le t \le 1; \\ 2 - t & \text{при } 1 < t < 2, T = 2 \end{cases}$

27. $f(t) = \sin t,\ T = \pi$

37. $sh\, t \cos 2t\, cos\, 3t$

47. $sh\, 4t \cos^2 3t$

10. Исследовать сходимость данных рядов.

07. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin n\alpha|}{n^2}; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2}$

37. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{2^n(2n-1)}; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^4+1}$

17. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+3}{n^3+2}; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{3n+1}}$

47. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n+5}; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{3^n(4n-1)}$

27. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n5^{n-1}}; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{2n-1}}$

11. Разложить в ряд Фурье периодическую функцию, определенную на указанном интервале формулой.

Вариант	Функция	Период	Вариант	Функция	Период
07.	$f(x) = \begin{cases} 1 \text{ при} -1 < x \leq 0; \\ x \text{ при } 0 < x \leq 1 \end{cases}$	2	27.	$f(x) = \begin{cases} 1 \text{ при} -1 \leq x < 0; \\ x \text{ при } 0 < x \leq 1 \end{cases}$	2
17.	$f(x) = -\dfrac{x}{\pi}$ при $0 < x < \pi$	π	37.	$f(x) = 3 - \lvert x \rvert$ при $-5 < x < 5$	10
			47.	$f(x) = 2x - 3$ при $-\pi < x < \pi$	2π

12. Для вариантов 07, 17, 27 представить интегралом Фурье функцию $f(t)$.

Для вариантов 37, 47 найти спектральную плотность функции $f(t)$

07. $f(t) = \begin{cases} e^{-t} \text{ при } t > 0; \\ 0 \text{ при } t = 0; \\ -e^{-t} \text{ при } t < 0 \end{cases}$

17. $f(t) = \begin{cases} 0 \text{ при } t < 0; \\ \pi t \text{ при } 0 \leq t \leq 1; \\ 0 \text{ при } t > 1 \end{cases}$

27. $f(t) = \begin{cases} t \text{ при } \lvert t \rvert \leq 1; \\ 0 \text{ при } \lvert t \rvert > 1 \end{cases}$

37. $f(t) = \begin{cases} 2e^{-2t} \text{ при } t \geq 0; \\ 0 \text{ при } t < 0 \end{cases}$

47. $f(t) = \begin{cases} \cos t \text{ при } \lvert t \rvert \leq \frac{\pi}{2}; \\ 0 \text{ при } \lvert t \rvert > \frac{\pi}{2} \end{cases}$

ВАРИАНТЫ 08,18,28,38,48

1. Найти неопределённые интегралы и полученные результаты проверить дифференцированием

Вариант	А	Б
08	$\int 3\sqrt{2^{x^3}}x^2dx$	$\int \frac{(5x+7)dx}{3^x}$
18	$\int sh^3\, x\, dx$	$\int (3x-8)2^{-2x}dx$
28	$\int \sin^2 2x \cos^2 2x\, dx$	$\int \frac{\ln x\, dx}{\sqrt{x}}$
38	$\int \frac{dx}{\sqrt{x}\ln\sqrt{x}}$	$\int e^{2x}\cos x\, dx$
48	$\int ch^3\, x\, dx$	$\int (2x^2-3x+1)e^{-x}dx$

2. Найти неопределённый интеграл

Вариант	Задание	Вариант	Задание
08	$\int \frac{dx}{x^3-5x^2+6x}$	38	$\int \frac{(3x-1)dx}{x(4x^2+4x+1)}$
18	$\int \frac{(x^3-3)dx}{x^3-x^2}$	48	$\int \frac{dx}{x^3+x^2+x}$
28	$\int \frac{(x^5-9x^3-4)dx}{x^2+3x}$		

3. Найти определённый интеграл

Вариант	Задание	Вариант	Задание
08	$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{xdx}{\sin^2 x}$	38	$\int_{-1}^{1} \frac{xdx}{\sqrt{5-4x}}$
18	$\int_{3}^{4} \frac{dx}{\sqrt{25-x^2}}$	48	$\int_{0}^{\pi} \sin 2x \sin 5x\, dx$
28	$\int_{-1}^{0} \frac{dx}{(1+x^2)^2}$		

4. Вычислить несобственный интеграл или доказать, что он расходится

Вариант	Задание	Вариант	Задание
08	$\int_{0}^{1} \ln 5x\, dx$	38	$\int_{0}^{4} \frac{dx}{(x-2)^5}$
18	$\int_{2}^{\infty} \frac{dx}{x\ln^2 x}$	48	$\int_{0}^{3} \frac{e^x dx}{x^2}$
28	$\int_{0}^{\infty} \frac{dx}{x^2+6x+5}$		

5. Вычислить двойной интеграл в заданной области D. Область интегрирования указать на рисунке.

Вариант	Задание
08	$\iint_D (18x^2y^2 + 32x^3y^3)dxdy \quad D: x = 1; y = \sqrt[3]{x}; y = -x^2$
18	$\iint_D (x^2y^3 + 4xy)dxdy \quad D: y = 1 - x^2; y = x^2$
28	$\iint_D (8xy + 9x^2y^2)dxdy \quad D: x = 1; y = \sqrt[3]{x}; y = -x^3$
38	$\iint_D (12x^2y^2 + 16x^3y^3)dxdy \quad D: x = 1; y = x^2;\ y = -\sqrt{x}$
48	$\iint_D (6xy + 24x^3y^3)dxdy \quad D: x = 1; y = \sqrt{x}; y = -x^2$

6. Вычислить объём тела, ограниченного указанными поверхностями.

<table>
<tr><td>Вариант</td><td>Задание</td><td>Вариант</td><td>Задание</td></tr>
<tr><td>08</td><td>$x^2 + y^2 = 25,$
$z = 7 - x, z = 0$</td><td>38</td><td>$x^2 + y^2 = 9,$
$z = x^2, z = 0$</td></tr>
<tr><td>18</td><td>$x^2 + y^2 = 9, y + z = 3, z = 0$</td><td rowspan="2">48</td><td rowspan="2">$x + y + z = 3,$
$x = 0; y = 0; z = 0$</td></tr>
<tr><td>28</td><td>$z = 4 - x^2 - y^2, z = 0$</td></tr>
</table>

7. Указать тип дифференциального уравнения и найти его общее решение.

08. $y' - yctg\, x = 2xsin\, x$

18. $y - y' \cos x = ycos\, x\,(1 - \sin x)$

28. $(3x^2 + 6xy + 3y^2)dx + (2x^2 + 3xy)dy = 0$

38. $\frac{dx}{x^2 - xy + y^2} = \frac{dy}{2y^2 - xy}$

48. $y' = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$

8. Найти решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее указанным начальным условиям.

08. $y'' + y' - 2y = e^{-x}$; $\quad y(0) = 1;\ y'(0) = 0$

18. $y'' + 3y' + 2y = 0$; $\quad y(0) = 2;\ y'(0) = 1$

28. $y'' - 4y' + 5y = 0$; $\quad y(0) = 3; y'(0) = 1$

38. $y'' + y = 5x^2$; $\quad y(0) = y'(0) = 0$

48. $y'' - 9y' - 14y = sh\, x$; $\quad y(0) = 0;\ y'(0) = 0$

9. Для вариантов 08, 18 найти изображение оригинала $f(t)$ с периодом T, заданного на интервале-периоде. Построить график $f(t)$

Для вариантов 28, 38, 48 найти изображение оригинала, используя теорему об интегрировании изображения.

08. $f(t) = \frac{\sin t}{|\sin t|}$

18. $f(t) = \begin{cases} 1 \text{ при } 0 \le t \le 2; \\ 0 \text{ при } 2 < t < 4, T = 4 \end{cases}$

28. $\frac{e^{2t} - t - 1}{t}$

38. $\frac{\cos 4t - e^{-3t}}{t}$

48. $\frac{ch\, 3t - \cos 4t}{t}$

10. Определить область сходимости ряда.

08. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n-1}}{2^n \sqrt{n+1}}$

18. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-x)^n - 1}{2^n n^2}$

28. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n (-x)^n}{\sqrt{n+5}}$

38. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n-1}}{3^n \sqrt{n-1}}$

48. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n x^n}{\sqrt{n+3}}$

11. Разложить в ряд Фурье периодическую функцию, определенную на указан ном интервале формулой.

Вари-ант	Функция	Период	Вари-ант	Функция	Период
08.	$f(x) = \begin{cases} \frac{2x}{\pi} \text{ при } 0 < x \leq \frac{\pi}{2} \\ \frac{2}{\pi}(\pi - x) \text{ при } \frac{\pi}{2} < x < \pi \end{cases}$	π	28.	$f(x) = \begin{cases} U_0 \text{ при } -\frac{\tau}{2} \leq t \leq \frac{\tau}{2} \\ 0 \text{ при } \frac{\tau}{2} < t < \frac{T}{2} \\ \quad -\frac{T}{2} < t < -\frac{\tau}{2} \end{cases}$	T $(\tau < T)$
18.	$f(x) = \begin{cases} \frac{x - \pi}{2} \text{ при } 0 < x < \pi \\ -\frac{x - \pi}{2} \text{ при } -\pi < x < \end{cases}$	2π	38.	$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } 0 \leq x \leq \pi \\ \frac{x}{\pi} - 2 \text{ при } \pi < x \leq 2\pi \end{cases}$	2π
			48.	$f(x) = -x \text{ при } -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$	π

12. Найти спектральную плотность функции $f(t)$

08. $f(t) = \begin{cases} e^{-2t} \text{ при } t \geq 0; \\ 0 \text{ при } t < 0 \end{cases}$

18. $f(t) = \begin{cases} e^{-\alpha t} \text{ при } t \geq 0; \\ 0 \text{ при } t < 0 (\alpha > 0); \end{cases}$

28. $f(t) = \begin{cases} 0 \text{ при } t < 0; \\ 2 \text{ при } 0 \leq t \leq 1; \\ 0 \text{ при } t > 1 \end{cases}$

38. $f(t) = \begin{cases} 1 - t \text{ при } 0 \leq t \leq 1; \\ t + 1 \text{ при } -1 \leq t < 0; \\ 0 \text{ при } t > 1 \end{cases}$

48. $f(t) = \begin{cases} \cos t \text{ при } |t| \leq \frac{\pi}{2}; \\ 0 \text{ при } |t| > \frac{\pi}{2} \end{cases}$

ВАРИАНТЫ 09,19,29,39,49

1. Найти неопределённые интегралы и полученные результаты проверить дифференцированием

Вариант	А	Б
09	$\int sh^3\, x\, ch\, x\, dx$	$\int arctg\, x\, dx$
19	$\int \frac{e^x dx}{9+4e^{2x}}$	$\int (x^2+2x) \sin\frac{x}{3} dx$
29	$\int \frac{dx}{\sqrt{x} \ln \sqrt{x}}$	$\int \arcsin x\, dx$
39	$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt[9]{7-x^3}}$	$\int x^2 \ln x\, dx$
49	$\int th^3\, x\, dx$	$\int \sqrt{4-x^2} dx$

2. Найти неопределённый интеграл

Вариант	Задание	Вариант	Задание
09	$\int \frac{(x^2-3x+2)dx}{x(x^2+2x+1)}$	39	$\int \frac{(3x^2+2)dx}{x^4+x^2}$
19	$\int \frac{x^2 dx}{x^3-x^2+x-1}$	49	$\int \frac{(x-3)dx}{(x^2-x)(x^2+1)}$
29	$\int \frac{(3-2x^3)dx}{x^3+2x}$		

3. Найти определённый интеграл

Вариант	Задание	Вариант	Задание
09	$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2\sin^2 x+3\cos^2 x}$	39	$\int_0^1 (2x+1)\, e^{-x} dx$
19	$\int_0^3 \frac{(x+2)dx}{\sqrt{6+4x}}$	49	$\int_0^{\frac{\pi}{8}} tg^4\, 2x dx$
29	$\int_{\frac{1}{\pi}}^{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin\frac{1}{x} dx}{x^2}$		

4. Вычислить несобственный интеграл или доказать, что он расходится

Вариант	Задание	Вариант	Задание
09	$\int_{-\infty}^0 x e^x dx$	39	$\int_1^{\infty} \frac{x^2 dx}{1+x^6}$
19	$\int_{-\infty}^0 \frac{dx}{x^2-2x+2}$	49	$\int_1^e \frac{dx}{x \ln x}$
29	$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x \ln x}$		

5. Изменить порядок интегрирования и найти полученный кратный интеграл. Область интегрирования изобразить на рисунке.

Вариант	Задание
09	$\int_{\frac{1}{e}}^{1} dy \int_{-\ln y}^{1} sh2x\, dx + \int_{1}^{e} dy \int_{\ln y}^{1} sh2x\, dx$
19	$\int_{1}^{2} dx \int_{2}^{x+1} e^{y} dy + \int_{2}^{5} dx \int_{2}^{3} e^{y} dy$
29	$\int_{0}^{1} dx \int_{0}^{x^2} x\sqrt{y} dx + \int_{1}^{3} dx \int_{0}^{\frac{3-x}{2}} x\sqrt{y} dx$
39	$\int_{0}^{1} dy \int_{-1}^{0} (x+y) dx + \int_{1}^{e} dy \int_{-1}^{-\ln y} (x+y) dx$
49	$\int_{1}^{3} dy \int_{0}^{\frac{y-1}{2}} x^2 y dx + \int_{3}^{4} dy \int_{0}^{\sqrt{4-y}} x^2 y dx$

6. Вычислить объём тела, ограниченного указанными поверхностями.

Вариант	Задание	Вариант	Задание
09	$x^2 + y^2 = 4$, $z = 4 + x, z = 0$	39	$x^2 + y^2 = 9, z = 9 - y, z = 0$
19	$z = 16 - x^2 - y^2$, $z = 0$	49	$x + y + z = 4$, $x = 0, y = 0, z = 0$
29	$x^2 + y^2 = 16$, $z = 1 + x^2, z = 0$		

7. Указать тип дифференциального уравнения и найти его общее решение.

09. $y' - yctg\, x = 2xsin\, x$

19. $(1 - x^2)y' + xy = 1$

29. $\left(xye^{x/y} + y^2\right)dx = x^2 e^{x/y} dy$

39. $(1 + x^2)y' - 2xy = (1 - x^2)^2$

49. $x(x + 2y)dy - y^2 dx = 0$

8. Найти решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее указанным начальным условиям.

09. $y''' - 3y' + 2y = e^{2x}$; $y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$

19.$y'' - 4y' + 5y = 0$; $y(0) = -1;\ y'(0) = 1$

29. $y'' + 2y' + 10y = 0$; $y(0) = 1; y'(0) = 1$

39. $y'' - 5y' + 6y = sh\, x$; $y(0) = 0; y'(0) = 0$

49. $y'' + 9y' = cos\, x$; $y(0) = 0 = y'(0) = 0$

9. Найти оригинал по его изображению $F(p)$.

09. $F(p) = \frac{p+2}{p^2+2p+10}$

39. $F(p) = \frac{e^{-2p}}{p^2-p+1}$

19. $F(p) = \frac{e^{-2p}\,(2p-1)}{p^2-4p+7}$

49. $F(p) = e^{-p}\,\frac{p-1}{p^2-p+1}$

29. $F(p) = \frac{2p\,e^{-p}}{p^2+1}$

10. Исследовать сходимость данных рядов.

09. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{3^n}; \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2-1}$

39. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{n^3-3n+5}; \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n^2-4}$

19. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(1+n^2)}}; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$

49. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+4)^3}; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{3n-2}}$

29. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-1)(6n-5)}; \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(ln^n)^2}$

11. Разложить в ряд Фурье периодическую функцию, определенную на указанном интервале формулой.

Вариант	Функция	Период	Вариант	Функция	Период
09.	$f(x)=\begin{cases}2 \text{ при} -1-x\leq 0\\ x \text{ при } 0<x<1\end{cases}$	2	29.	$f(x)=2x-3$ при $-3<x<3$	6
			39.	$f(x)=x+4$ при $-\pi<x<\pi$	2π
19.	$f(x)=\begin{cases}U_0 \text{ при } 0<x\leq\pi\\ -U_0 \text{ при } \pi<x<2\pi\end{cases}$	2π	49.	$f(x)=2x-3$ при $-\pi<x<\pi$	2π

12. Найти спектральную плотность функции $f(t)$

09. $f(t)=\begin{cases}e^{-t} \text{ при } t\geq 0;\\ 0 \text{ при } t<0\end{cases}$

19. $f(t)=\begin{cases}t-1 \text{ при } 0\leq t\leq 1;\\ 0 \text{ при } t<0; t>1\end{cases}$

29. $f(t)=\begin{cases}\cos t \text{ при } |t|\leq\frac{\pi}{2};\\ 0 \text{ при } |t|>\frac{\pi}{2}\end{cases}$

39. $f(t)=\begin{cases}1 \text{ при } 0<t\leq\tau;\\ 0 \text{ при } t\leq 0; t>\tau\end{cases}$

49. $f(t)=\begin{cases}e^{-2t} \text{ при } t\geq 0;\\ 0 \text{ при } t<0\end{cases}$

ВАРИАНТЫ 10,20,30,40,50

1. Найти неопределённые интегралы и полученные результаты проверить дифференцированием

Вариант	А	Б
10	$\int \frac{sh\, xdx}{\sqrt{ch2x}}$	$\int \frac{\log_8 xdx}{x^5}$
20	$\int \frac{\sin\sqrt{x}dx}{\sqrt{x}}$	$\int \frac{x^2-x+2}{e^{3x}}dx$
30	$\int \sin^3 3x \cos^2 3x\, dx$	$\int \frac{\ln x\, dx}{\sqrt[3]{x^2}}$
40	$\int \frac{\ln(tg\, x)dx}{\sin x \cos x}$	$\int x\, arctg\frac{x}{5}dx$
50	$\int sh^3\, x\, dx$	$\int \sqrt{x}\lg x\, dx$

2. Найти неопределённые интеграл

Вариант	Задание	Вариант	Задание
10	$\int \frac{(3x^2+2)dx}{x^4+x^2}$	40	$\int \frac{(3x^2+25)dx}{x^2+3x+2}$
20	$\int \frac{dx}{x^3+x^2+x}$	50	$\int \frac{dx}{x^3-8}$
30	$\int \frac{dx}{x^2(x+3)}$		

3. Найти определённые интеграл

Вариант	Задание	Вариант	Задание
10	$\int_{-1}^{1} \frac{xdx}{\sqrt{5-4x}}$	40	$\int_{1}^{2} \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x}}$
20	$\int_{0}^{\pi} \sin 7x \cos 3x\, dx$	50	$\int_{-1}^{0} \frac{dx}{4+x^2}$
30	$\int_{1}^{e^2} \frac{dx}{x\sqrt{2+\ln x}}$		

4. Вычислить несобственный интеграл или доказать, что он расходится

Вариант	Задание	Вариант	Задание
10	$\int_{0}^{\infty} x\sin x\, dx$	40	$\int_{1}^{\infty} \frac{x^2dx}{1+x^6}$
20	$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x}dx$	50	$\int_{0}^{1} \ln x\, dx$
30	$\int_{2}^{\infty} \frac{\ln x dx}{x}$		

5. Вычислить двойной интеграл в заданной области D. Область интегрирования указать на рисунке.

Вариант	Задание
10	$\iint_D (8xy + 9x^2y^2)dxdy \quad D{:}\, x = 1; y = \sqrt[3]{x}; y = -x^3$
20	$\iint_D (9x^2y^2 + 25x^4y^4)dxdy \quad D{:}\, x = 1, y = \sqrt{x}; y = -x^3$
30	$\iint_D (4xy + 16x^3y^3)dxdy \quad D{:}\, x = 1; y = \sqrt[3]{x}; y = -x^3$
40	$\iint_D (xy - 10x^4y^4)dxdy \quad D{:}\, x = 1; y = \sqrt[3]{x}, y = -x^2$
50	$\iint_D (xy + 5x^2y^3)dxdy \quad D{:}\, y = x; y = x^3$

6. Вычислить объём тела, ограниченного указанными поверхностями.

Вариант	Задание	Вариант	Задание
10	$z = 4 - x^2 - y^2, z = 0$	40	$x^2 + y^2 = 9, z = \frac{x^4}{4}, z = 0$
20	$x^2 + y^2 = 4, y + z = 2, z = 0$	50	$x^2 + y^2 = 16, z = 1 + x^2, z = 0$
30	$z = 25 - x^2 - y^2, z = 0$		

7. Указать тип дифференциального уравнения и найти его общее решение.

10. $xy' + y = \ln x + 1$

20. $y' - 2xy = xe^{-x^2}$

30. $(1 + x^2)dy - xydx = 0$

40. $y' \cos x = y\sin x + \sin x$

50. $x\ln\frac{x}{y}dy - ydx = 0$

8. Найти решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее указанным начальным условиям.

10. $y''' - y'' = \cos x$; $\quad y(0) = 1;\ y'(0) = 0;\ y''(0) = 0$

20. $y'' + y' - 2y = e^{-x}$; $\quad y(0) = 1;\ y'(0) = 0$

30. $y'' + 3y' + 2y = 0$; $\quad y(0) = 0;\ y'(0) = 1$

40. $y'' - 4y' + 3y = \sin 2x$; $\quad y(0) = \ y'(0) = 0$

50. $y''' + 3y'' - 4y' = e^{-x}$; $\quad y(0) = \ y'(0) = y''(0) = 0$

9. Найти изображение оригинала, используя теорему об интегрировании изображения.

10. $\frac{ch\ 3t - \cos 4\mathrm{t}}{t}$

40. $\frac{\cos 2t - e^{-5t}}{t}$

20. $\frac{\cos 4t - e^{-3t}}{t}$

50. $\frac{ct\ 4t - \cos 2t}{t}$

30. $\frac{e^{2t} - t - 1}{t}$

10. Определить область сходимости ряда.

10 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

40. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{4^{n-1}(n+1)}$

20. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{3^n\sqrt{n+1}}$

50. $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n-1}}{3^n\sqrt{n+1}}$

30. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n x^n}{\sqrt[3]{n}}$

11. Разложить в ряд Фурье периодическую функцию, определенную на указанном интервале формулой.

Вариант	Функция	Период	Вариант	Функция	Период
10.	$f(x) = x - 2$ при $0 < x \leq 2x$	2π	40.	$f(x) = \lvert x\rvert - 5$ при $-2 < x < 2$	4
20.	$f(x) = 2x + 3$ при $-\pi < x < \pi$	2π	50.	$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } -\pi < x \leq 0 \\ x \text{ при } 0 < x < \pi \end{cases}$	2π
30.	$f(x) = \begin{cases} -2 \text{ при } 0 < x < \pi \\ 1 \text{ при } -\pi < x < 0 \end{cases}$	2π			

12 . Представить интегралом Фурье функцию $f(t)$

10. $f(t) = \begin{cases} e^{-t} \text{ при } 0 < t \leq 1; \\ e^{t} \text{ при } -1 \leq t \leq 0; \\ 0 \text{ при } |t| > 1 \end{cases}$

40. $f(t) = \begin{cases} 1 \text{ при } |t| < 1; \\ \frac{1}{2} \text{ при } |t| = 1; \\ 0 \text{ при } |t| > 1 \end{cases}$

11. $f(t) = \begin{cases} 1 \text{ при } 0 \leq t \leq \tau; \\ 0 \text{ при } t < 0, t > \tau \end{cases}$

50. $f(t) = \begin{cases} t - 1 \text{ при } 0 \leq t \leq 1; \\ 0 \text{ при } t > 1, t < 0 \end{cases}$

30. $f(t) = \begin{cases} 1 - \frac{t}{2} \text{ при } 0 \leq t \leq 2; \\ 0 \text{ при } t > 2, t < 0 \end{cases}$