**СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ ФИЛИАЛ
ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ФЕДЕРАЛЬНОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО БЮДЖЕТНОГО ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО
УЧРЕЖДЕНИЯ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ СВЯЗИ И ИНФОРМАТИКИ»**

КАФЕДРА ОБЩЕНАУЧНОЙ ПОДГОТОВКИ

С.А. ДОКУЧАЕВ, Г. С. КОСТЕЦКАЯ

ПРАКТИКУМ ПО ИНТЕГРАЛЬНОМУ ИСЧИСЛЕНИЮ ФУНКЦИИ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Учебное пособие

**Ростов-на-Дону
2019**

УДК 517.9
ББК 22.161.1
Д 63

Докучаев С.А., Костецкая Г.С. Практикум по интегральному исчислению функции многих переменных: учеб. пособ.: Ростов-на-Дону: СКФ МТУСИ, 2019. – 60 с.

В учебном пособии излагается теория интегрального исчисления функции многих переменных с примерами, задачами и упражнениями для самостоятельной работы. Рассмотрены основные типы кратных, криволинейных интегралов, представлены основные методы их вычисления. Подробно рассмотренные примеры решения задач и объем заданий для самостоятельного изучения дают возможность студенту глубже понять и изучить материал. Данное пособие предназначено для студентов направления подготовки «Инфокоммуникационные технологии и системы связи» и «Информатика и вычислительная техника».

Учебное пособие рассмотрено и утверждено
на заседании кафедры Общенаучной подготовки,
протокол № 3 от 23 октября 2017 г.
Отв. редактор Докучаев С.А.

Рецензенты:
Авсянкин О.Г. доктор ф.-м. н., профессор кафедры «Дифференциальных и интегральных уравнений» института математики, механики и компьютерных наук им. И.И. Воровича ЮФУ.
Соколова О.И. доктор пед. наук профессор, профессор каф. «Вычислительная математика и АСУ» ФГБОУ ВО «Ростовского государственного университета путей сообщения.

И з д а т е л ь с т в о С К Ф М Т У С И
Сдано в набор 23.10.17. Изд. № 273. Подписано в печать 05.12.17. Зак. 287.
Печ. листов 3,81. Учетно-изд. л. 3,05. Печать оперативная. Тир. 30 экз.
Отпечатано в Полиграфическом центре СКФ МТУСИ, Серафимовича, 62.

Оглавление

ГЛАВА I

§1. ДВОЙНОЙ ИНТЕГРАЛ

1.1.Определение двойного интеграла

Пусть функция *f (x,y)* непрерывна в ограниченной замкнутой области *D* плоскости *xOy*. Разобьем область произвольным образом на n частей, обозначим их $D_k, k = 1, \dots, n$. Через ΔS_k обозначим площадь D_k, d_k – диаметр D_k (наибольшее из расстояний между двумя точками границы этой области). Выберем произвольную точку $P_k(\xi_k, \eta_k) \in D_k, k = 1,2, \dots n$, вычислим $f\,(P_k) = f\,(\xi_k, \eta_k), k = 1, \dots n$ и составим интегральную сумму

$$\sum_{k=1}^{n} f\,(\xi_k, \eta_k)\,\Delta S_k \tag{1.1}$$

соответствующую данному разбиению области *D* на части и данному выбору точек $P_k(\xi_k, \eta_k)$, $k = 1,2, \dots n$.

<u>Определение</u>. Если существует конечный предел интегральных сумм (1.1) при условии, что $\max d_k \to 0$ и он не зависит ни от способа разбиения области D на части, ни от выбора точек $P_k, k = 1,2, \dots n$, то его называют двойным интегралом от функции *f (x,y)* по области D и обозначают

$$\iint\limits_D f\,(x,y)dxdy = \lim_{\max d_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} f\,(\xi_k, \eta_k)\,\Delta S_k \tag{1.2}$$

1.2. Свойства двойных интегралов

1. $\iint\limits_D (f_1\,(x,y) \pm f_2\,(x,y))dxdy = \iint\limits_D f_1\,(x,y)dxdy \pm \iint_D f_2\,(x,y)dxdy$

2. $\iint\limits_D kf\,(x,y)dxdy = k\iint\limits_D f\,(x,y)dxdy$

3. $D = D_1 \cup D_2, D_1 \cap D_2 \neq \emptyset$, тогда

$$\iint\limits_D f\,(x,y)dxdy = \iint\limits_{D_1} f\,(x,y)dxdy \pm \iint\limits_{D_2} f\,(x,y)dxdy$$

4. Если $m \leq f\,(x,y) \leq M$ в области D, то $\exists\, m \leq \mu \leq M$:

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \mu \cdot S_D, \text{где } S_D - \text{площадь области } D$$

5. Если $f(x,y)$ непрерывна в D, то $\exists$ точка $M(x_0, y_0) \in D$:

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = f(M) \cdot S_D$$

1.3. Вычисление двойных интегралов

Пусть $D = \{(x,y): a \le x \le b, \ \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)\}$, где $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x) -$ непрерывны на $[a,b]$ (рисунок 1). Очевидно, что в этом случае прямая параллельная оси *Oy* пересекает границу области D не более чем в 2-х точках. Тогда

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy \qquad (1.3)$$

Пусть теперь $D = \{(x,y): c \le y \le d, \ \phi_1(y) \le x \le \phi_2(y)\}$, где $\phi_1(y)$, $\phi_2(y) -$ непрерывны на $[c,d]$ (рисунок 2). В этом случае прямая параллельная оси *Ox* пересекает границу области D не более чем в 2-х точках. Тогда

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x,y)dx \qquad (1.4)$$

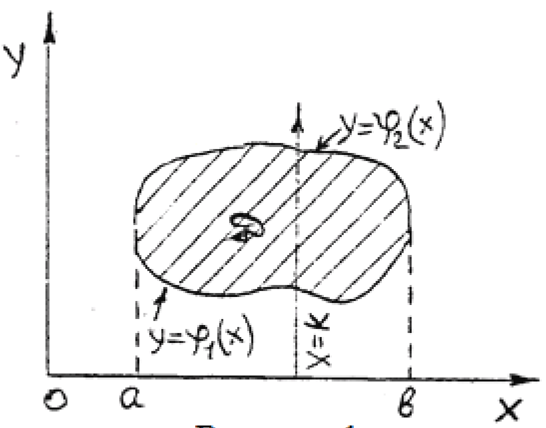

Рисунок 1

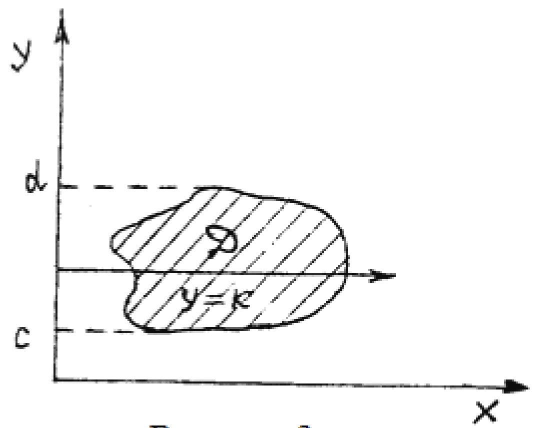

Рисунок 2

Описанные выше области называются простыми соответственно относительно оси *Ox* и оси *Oy*. Если же прямые параллельные координатным осям пересекают область D не более чем в 2-х точках, то такая область называется простой и

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x,y)dx \qquad (1.5)$$

В более общих случаях область интегрирования D сводится к этим простым областям путем разбиения на части прямыми параллельными координатным осям.

Пример **1.** Представить двойной интеграл $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ в виде двукратного, причем расставить пределы интегрирования в том и другом порядке, если область D ограничена линиями $y = x^2$, $x = y^2$.

Решение. Для построения области D найдем абсциссы точек пересечения парабол $y = x^2$ и $x = y^2$. Для этого решим систему уравнений

$$\begin{cases} y = x^2 \\ x = y^2 \end{cases} \Rightarrow x = (x^2)^2 \Rightarrow x^4 - x = 0; x(x^3-1) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 1$$

Начертим область D (рисунок 3).

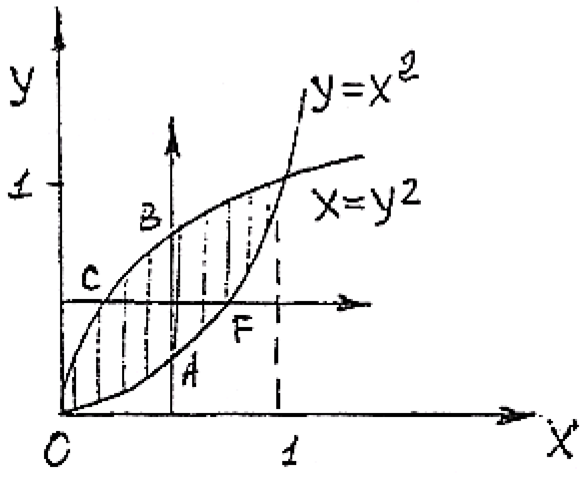

Рисунок 3

Возьмем сначала внешнее интегрирование по переменной x. Очевидно, что x меняется от 0 до 1, т.е. $0 \leq x \leq 1$. Чтобы найти пределы изменения переменной y, проведем прямую параллельную оси Oy, проходящую через область D и отметим точки входа и выхода.

Точка входа А лежит на параболе $y = x^2$, а точка выхода В лежит на параболе $x = y^2$, т.е. $y = \sqrt{x}$, поэтому

$$\iint\limits_D f\,(x,y)dxdy = \int\limits_0^1 dx \int\limits_{x^2}^{\sqrt{x}} f\,(x,y)dy$$

Теперь внешнее интегрирование будем проводить по y, при этом $0 \le y \le 1$. Чтобы найти пределы изменения переменной x поступим аналогично предыдущему: проведем прямую параллельную оси Ox и отметим точки входа и выхода. Точка входа C лежит на параболе $x = y^2$, а точка выхода F – на параболе $y = x^2$, т.е. $x = \sqrt{y}$, поэтому

$$\iint\limits_D f\,(x,y)dxdy = \int\limits_0^1 dy \int\limits_{y^2}^{\sqrt{y}} f\,(x,y)dx$$

Таким образом область D является простой относительно оси Ox и относительно Oy, т.е. вообще простой.

Пример **2.** Представить двойной интеграл $\iint\limits_D f\,(x,y)dxdy$ в виде двукратного, причем расставить пределы интегрирования в том и другом порядке, если область D ограничена линиями $y = x,\ x = 2,\ xy = 1$.

Решение. Чтобы построить область D найдем абсциссы точек пересечения гиперболы $xy = 1$ и прямых $y = x$ и $x = 2$. Для этого решим системы

$$\begin{cases} xy = 1 \\ y = x \end{cases} \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x_1 = 1 \qquad \begin{cases} xy = 1 \\ x = 2 \end{cases} \Rightarrow x_2 = 2$$

Изобразим область D (рисунок 4):

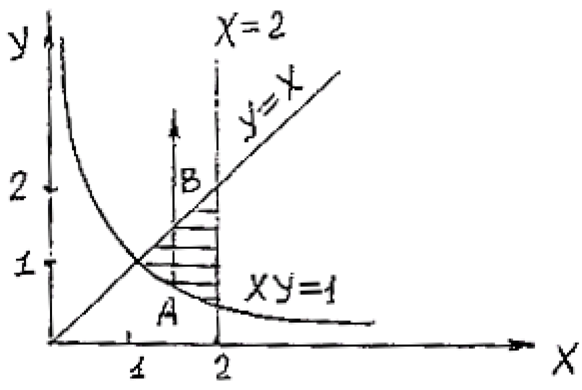

Рисунок 4

Выберем сначала внешнее интегрирование по переменной x, при этом $1 \leq x \leq 2$. Чтобы найти пределы изменения переменной у проведем прямую параллельную оси Oy и отметим точки входа и выхода. Точка входа A лежит на гиперболе $xy = 1$, т.е. $y = \frac{1}{x}$, а точка выхода B на прямой $y = x$, поэтому

$$\iint\limits_{D} f\,(x,y)dxdy = \int\limits_{1}^{2} dx \int\limits_{\frac{1}{x}}^{x} f\,(x,y)dy$$

Изменим порядок интегрирования. Внешнее интегрирование будем брать по y. При этом левая граница области D состоит из двух участков: гипербола $xy = 1$ и прямой $y = x$. Поэтому разобьем область D прямой $y = 1$ на две непересекающиеся области D_1 и D_2. В области D_1 переменная меняется от ординаты токи пересечения гиперболы $xy = 1$ и прямой $y = x$.

То есть $\begin{cases} xy = 1 \\ x = 2 \end{cases} \Rightarrow 2y = 1, y = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} \leq y \leq 1.$

Чтобы найти, как меняется переменная x, проведем через D_1 прямую параллельную оси Ox и отметим точки входа и выхода. Точка входа K лежит на $xy = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{y}$, а точка выхода P на $x = 2$.

Следовательно,

$$\iint\limits_{D_1} f\,(x,y)dxdy = \int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} dy \int\limits_{\frac{1}{y}}^{2} f\,(x,y)dx$$

Аналогично с D_2: $1 \le y \le 2$; точка входа M лежит на прямой $y = x$, т.е. $x = y$, а точка выхода N на прямой $x = 2$. Следовательно,

$$\iint_{D_2} f\,(x, y)dxdy = \int_1^2 dy \int_y^2 f\,(x, y)dx$$

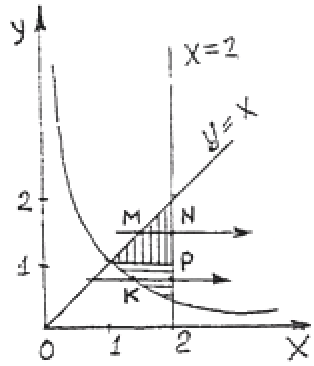

Рисунок 5

Пользуясь свойством двойного интеграла

$$\iint_D f\,(x, y)dxdy = \iint_{D_1} f\,(x, y)dxdy + \iint_{D_2} f\,(x, y)dxdy,$$

имеем

$$\iint_D f\,(x, y)dxdy = \int_{\frac{1}{2}}^{1} dy \int_{\frac{1}{y}}^{2} f\,(x, y)dx + \int_1^2 dy \int_y^2 f\,(x, y)dx$$

Пример 3. Изменить порядок интегрирования в интеграле

$$\int_1^2 dx \int_{\ln x}^{5-x} f\,(x, y)dx$$

Решение. Сначала по пределам интегрирования определим область интегрирования. Полагая x равным пределам интеграла с переменной x, а y равным пределам интеграла с переменной y, получим:

$$x = 1, x = 2, y = \ln x\,, y = 5 - x$$

Построив эти линии, получим область интегрирования (рисунок 6).

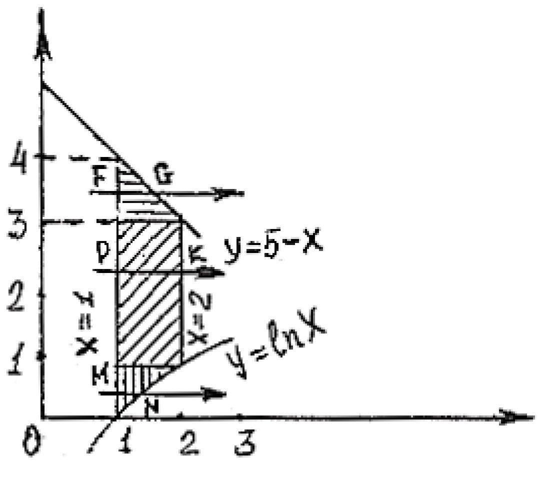

Рисунок 6

Изменим порядок интегрирования. Правая граница области D состоит из 3-х участков: прямой $y = 5 - x$, прямой $x = 2$ и кривой $y = \ln x$. Поэтому область D разбивается на 3 простые относительно оси Ox области D_1, D_2, D_3. Расставим пределы интегрирования в каждой из них. Для этого сначала найдем точки пересечения.

$$\begin{cases} y = \ln x \\ x = 2 \end{cases} \Rightarrow y_2 = \ln 2\,; \quad \begin{cases} y = \ln x \\ x = 1 \end{cases} \Rightarrow y_1 = \ln 1 = 0$$

$$\begin{cases} y = 5 - x \\ x = 2 \end{cases} \Rightarrow y_3 = 5 - 2 = 3; \quad \begin{cases} y = 5 - x \\ x = 1 \end{cases} \Rightarrow y_4 = 5 - 1 = 4$$

В области D_1: $0 \le y \le \ln 2$. Проведем прямую через D_1 параллельно оси Ox. Точка входа M лежит на прямой $x = 1$, а точка выхода N на кривой $y = \ln x$, т.е. $x = e^y$, поэтому

$$\iint\limits_{D_1} f\,(x, y)dxdy = \int\limits_0^{\ln 2} dy \int\limits_1^{e^y} f\,(x, y)dx$$

В области D_2: $\ln 2 \le y \le 3$. Проведем прямую через D_2 параллельно оси Ox. Точка входа P лежит на прямой $x = 1$, а точка выхода K на прямой $x = 2$, поэтому

$$\iint\limits_{D_2} f\,(x, y)dxdy = \int\limits_{\ln 2}^{3} dy \int\limits_1^{2} f\,(x, y)dx$$

В области D_3: $3 \le y \le 4$. Проведем прямую через D_3 параллельно оси Ox. Точка входа F лежит на прямой $x = 1$, а точка выхода G на прямой $y = 5 - x$, т.е. $x = 5 - y$ поэтому

$$\iint\limits_{D_3} f\,(x, y)dxdy = \int\limits_3^{4} dy \int\limits_1^{5-y} f\,(x, y)dx$$

Пользуясь свойством двойного интеграла

$$\iint\limits_{D} f\,(x, y)dxdy = \iint\limits_{D_1} f\,(x, y)dxdy + \iint\limits_{D_2} f\,(x, y)dxdy + \iint\limits_{3} f\,(x, y)dxdy$$

окончательно имеем

$$\iint\limits_D f\,(x,y)dxdy = \int\limits_0^{\ln 2} dy \int\limits_1^{e^y} f\,(x,y)dx + \int\limits_{\ln 2}^{3} dy \int\limits_1^{2} f\,(x,y)dx + \int\limits_3^{4} dy \int\limits_1^{5-y} f\,(x,y)dx$$

Пример 4. Переменив порядок интегрирования, записать в виде одного повторного интеграла

$$\int\limits_1^3 dy \int\limits_0^{\frac{y-1}{2}} f\,(x,y)dx + \int\limits_3^4 dy \int\limits_0^{\sqrt{4-y}} f\,(x,y)dx$$

Решение. По пределам интегрирования запишем уравнения линий, которые ограничивают область D: $y = 1, y = 4, x = \frac{y-1}{2}, x = \sqrt{4-y}$. Прямая $y = 3$, по-видимому, делит область интегрирования на две непересекающиеся области.

Начертим область D (рисунок 7)

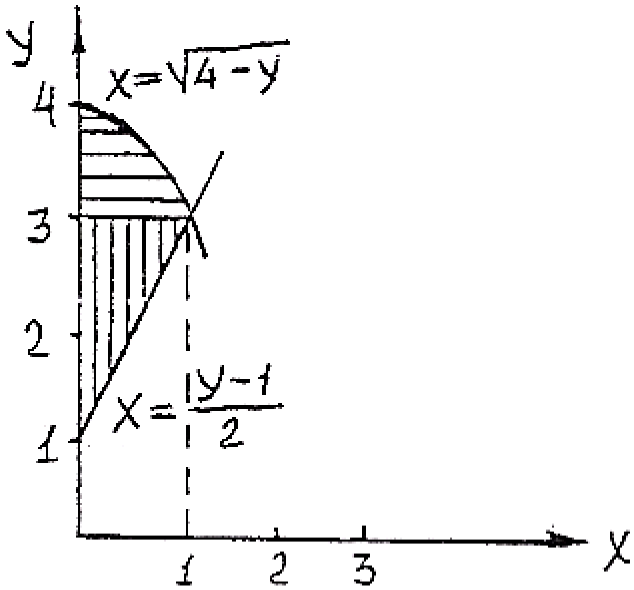

Рисунок 7

Очевидно, что она простая относительно оси *Ox*. Выразим y из $x = \sqrt{4-y}$, получим $y = 4 - x^2$. Аналогично выразим y из $x = \frac{y-1}{2}$, т.е. $y = 2x + 1$, таким образом: $0 \le x \le 1; 2x + 1 \le y \le 4 - x^2$

Поэтому имеем

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_0^1 dx \int_{2x+1}^{4-x^2} f(x,y)dy$$

или

$$\int_1^3 dy \int_0^{\frac{y-1}{2}} f(x,y)dx + \int_3^4 dy \int_0^{\sqrt{4-y}} f(x,y)dx = \int_0^1 dx \int_{2x+1}^{4-x^2} f(x,y)dy$$

Пример 5. Вычислить двойной интеграл $\iint_D sin\,(x+y)dxdy,$ где D – область, ограниченная линиями $y = 0, y = x, x + y = \frac{\pi}{2}$

Решение. Начертим область *D* (рисунок 8). Она является простой относительно оси *Ox* пересекает область не более чем в 2-х точках).

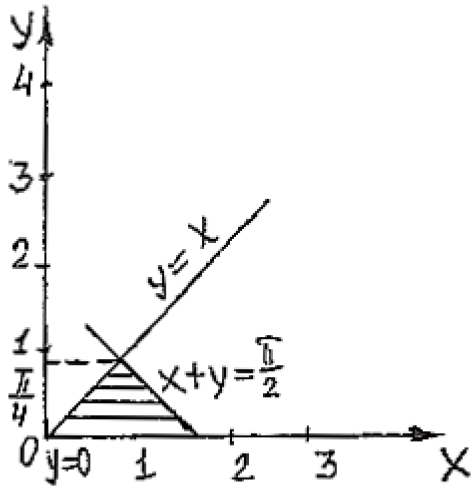

Рисунок 8

Найдем ординату точки пересечения прямых $y = x, x + y = \frac{\pi}{2}$

$$\begin{cases} y = x \\ x + y = \dfrac{\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow 2y = \frac{\pi}{2}; \quad y = \frac{\pi}{4}$$

Значит $D = \left\{0 \le y \le \frac{\pi}{4};\ y \le x \le \frac{\pi}{2} - y\right\}.$

Поэтому

$$\iint\limits_D sin\,(x+y)dxdy = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} dy \int\limits_y^{\frac{\pi}{2}-y} sin\,(x+y)dx$$

Вычислим полученный интеграл, сначала проинтегрировав по x, считая y постоянной, а затем полученный интеграл, проинтегрировав по y:

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} dy \int\limits_y^{\frac{\pi}{2}-y} sin\,(x+y)dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} dy(-cos\,(x+y)\,)\Big|_{x=y}^{x=\frac{\pi}{2}-y} = -\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos\left(\frac{\pi}{2}-y+y\right)-\cos 2y)dy =$$

$$= -\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos\frac{\pi}{2}-\cos 2y)dy = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2y dy = \frac{1}{2}\sin 2y\,\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}(\sin\frac{\pi}{2}-\sin 0) = \frac{1}{2}$$

Отметим, что брать за внешнюю переменную интегрирования *x* было бы неудобно, так как «верхняя» относительно оси *Ox* граница области *D* состоит из двух участков $y = x,\ x + y = \pi/2$.

Ответ: $1/2$.

Пример 6. Вычислить двойной интеграл $\iint_D (x+y)dxdy$, где D – область, ограниченная линиями $x = 0,\ y = \frac{3}{2}x(x > 0), y = 4 - (x-1)^2$

Решение. Изобразим область интегрирования (рисунок 9), учитывая, что $y = 4 - (x-1)^2$ – парабола симметричная относительно оси *Oy*, ветви вниз, вершина в точке (1,4).

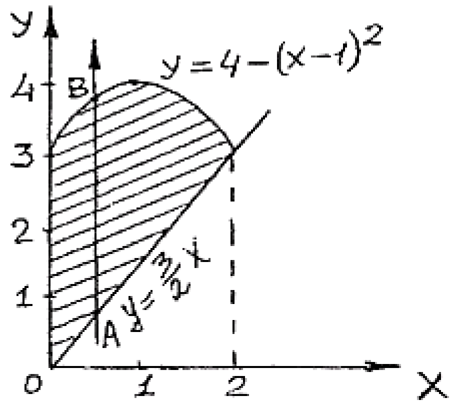

Рисунок 9

Найдем точку пересечения параболы $y = 4 - (x-1)^2$ и прямой $y = \frac{3}{2}x$.

$$\begin{cases} y = 4 - (x-1)^2 \\ y = \frac{3}{2}x \end{cases} \Rightarrow \frac{3}{2}x = 4 - (x-1)^2,$$

$$x^2 - \frac{1}{2}x - 3 = 0; 2x^2 - x - 6 = 0,$$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+48}}{4} = \frac{1 \pm 7}{4};\ x_1 = -\frac{3}{2};\ x_2 = 2$$

Нас интересует $x = 2$. В области D x меняется от 0 до 2, чтобы найти, как меняется y проведем прямую параллельную оси Oy и отметим точки входа и выхода. Очевидно, что $\frac{3}{2}x \le y \le 4 - (x-1)^2$, поэтому

$$\iint\limits_D (x+y)dxdy = \int\limits_0^2 dx \int\limits_{\frac{3}{2}x}^{4-(x-1)^2} (x+y)dy = \int\limits_0^2 dx\left(xy + \frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_{y=\frac{3}{2}x}^{y=4-(x-1)^2} =$$

$$= \int\limits_0^2 \left[x(4-(x-1)^2 + \frac{(x(4-(x-1)^2)^2}{2} - \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}x\right)^2\right]dx = \int\limits_0^2 [4x - x(x^2-2x+1) +$$

$$+ \frac{16-8(x-1)^2 + (x-1)^4}{2} - \frac{3}{2}x^2 - \frac{9}{8}x^2\Bigg]dx = \int\limits_0^2 \Big[3x - x^3 + 2x^2 + 8 - 4x^2 + 8x - 4 +$$

$$+ \frac{1}{2}(x-1)^4 - \frac{21}{8}x^2\Bigg]dx = \int\limits_0^2 \left[11x - x^3 - \frac{37}{8}x^2 + 4 + \frac{1}{2}(x-1)^4\right]dx = \Bigg[\frac{11}{2}x^2 - \frac{x^4}{4} -$$

$$-\frac{37}{24}x^3 + 4x + \frac{1}{2}\frac{(x-1)^5}{5}\Big] \Bigg|_0^2 = 22 - 4 - \frac{37}{3} + 8 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} = 26 - \frac{37}{3} + \frac{1}{5} =$$

$$= \frac{390 - 185 + 3}{15} = \frac{208}{15}$$

Ответ: $\frac{208}{15}$

1.4.Замена переменных в двойном интеграле. Двойной интеграл в полярных координатах.

Рассмотрим области D и G соответственно в плоскостях xOy и uOv (рисунок 10,11). Будем считать, что между областями D и G установлено взаимно однозначное и непрерывное соответствие. Пусть u,v связаны с x,y соотношениями $x = x(u,v), y = y(u,v)$, где функции $x(u,v), y(u,v)$ имеют непрерывные частные производные первого порядка в G и определитель преобразования координат x,y в u,v (якобиан) не обращается в нуль ни одной точке области G

$$J = \frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix} \neq 0$$

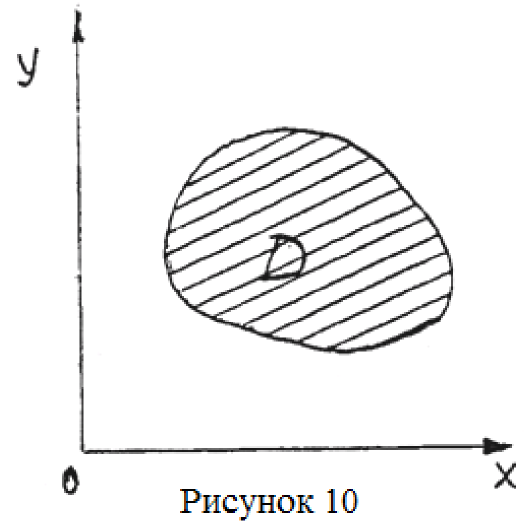

Рисунок 10

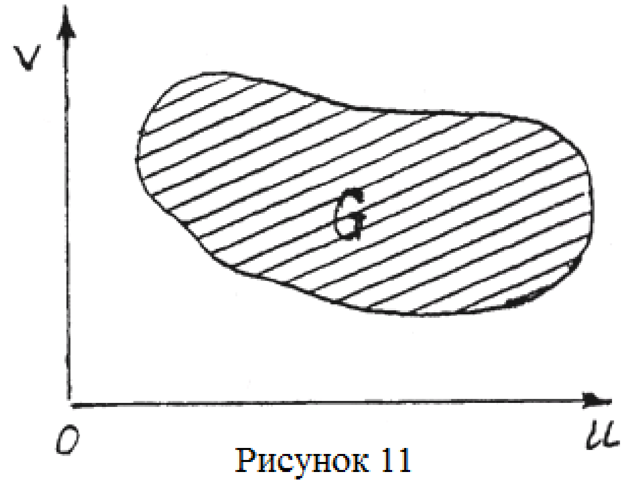

Рисунок 11

Тогда справедлива формула замены переменных:

$$\iint_D f\,(x,y)dxdy = \iint_G f(x(u,v), y(u,v))|\,J\,|dudv \qquad (1.6)$$

В тех случаях, когда область интегрирования D представляет собой круг, часть круга, кольцо или часть кольца, удобно переходить к полярным координатам

$$x = r\cos\phi\,, y = \ r\sin\phi\,, J = r \tag{1.7}$$

Поэтому в полярных координатах имеем

$$\iint\limits_D f\ (x,y)dxdy = \iint\limits_G f(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)rdrd\varphi \tag{1.8}$$

Отметим, что уравнения линий, ограничивающих область интегрирования, тоже нужно преобразовывать к полярным координатам с помощью формул (1.7).

Пример 7. Вычислить двойной интеграл $\iint_D ydxdy,$ если область D ограничена половиной дуги окружности $x^2 + y^2 = ax$ и отрезком оси Ox от точки с абсциссой равной 0 до точки с абсциссой равной a.

Решение. Для построения области D найдем центр окружности:

$$x^2 - ax + y^2 = 0 \Rightarrow \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4} + y^2 = 0 \Rightarrow \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 -$$

окружность с центром в точке $\left(\frac{a}{2}, 0\right)$ и $R = \frac{a}{2}$. Изобразим область D – полукруг (рисунок 12)

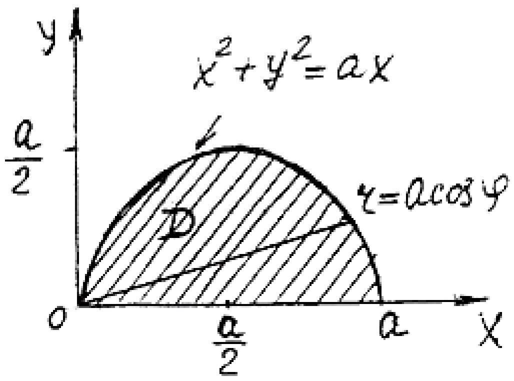

Рисунок 12

Введем полярные координаты

$$x = rcos\varphi, y = rsin\varphi$$

Уравнение окружности в полярных координатах принимает вид

$r^2 = ar\cos\varphi$ или $r_1 = 0, r_2 = a\,cos\varphi$

Подынтегральная функция имеет вид $y = rsin\,\varphi$. Угол φ меняется от 0 до $\frac{\pi}{2}$ (полукруг находится в I четверти). При каждом фиксированном φ радиус r меняется от 0 (в начале координат) до $r = a\,cos\varphi$ (на окружности). Тогда имеем

$$\iint\limits_D ydxdy = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{a\,cos\varphi} rsin\,\varphi rdr = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} sin\,\varphi d\varphi \int\limits_0^{a\,cos\varphi} r^2dr = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} sin\,\varphi \frac{r^3}{3}\Bigg|_{r=0}^{r=a\cos\varphi} d\varphi =$$

$$= \frac{a^3}{3}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} sin\varphi\cos^3\varphi d\varphi = -\frac{a^3}{3}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\varphi d\cos\varphi = -\frac{a^3}{12}\cos^4\varphi\,\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{a^3}{12}$$

Ответ: $\frac{a^3}{12}$.

Пример 8. Вычислить двойной интеграл $\iint_D xy^2dxdy,$ где область интегрирования D ограничена кривыми $x^2 + (y-1)^2 = 1$, $x^2 + (y-2)^2 = 4$.

Решение. Данные кривые являются окружностями

$x^2 + (y-1)^2 = 1$ – центр в точке (0,1), $R_1 = 1$.

$x^2 + (y-2)^2 = 4$ – центр в точке (0,1), $R_2 = 2$.

Изобразим область D (рисунок 13).

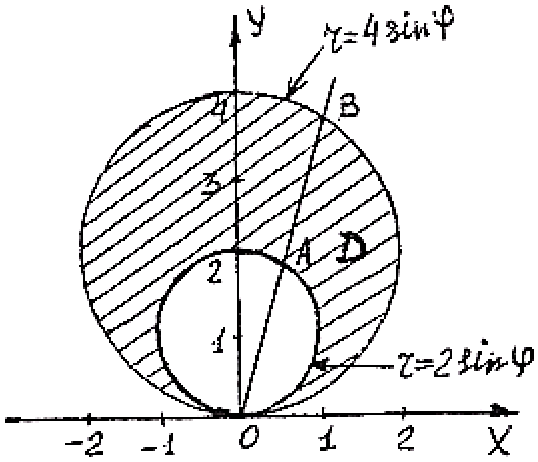

Рисунок 13

Введем полярные координаты

$x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi$

и преобразуем уравнения данных окружностей к полярным координатам

а) $x^2 + (y-1)^2 = 1 \Rightarrow r^2\cos^2\varphi + (r\sin\varphi - 1)^2 = 1$

$r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi - 2r\sin\varphi = 0 \Rightarrow r^2 - 2r\sin\varphi = 0 \Rightarrow r(r - 2\sin\varphi) = 0$

$r_1 = 0$ (это уравнение определяет единственную точку – полюс O(0,0))

$r_2 = 2\sin\varphi$ (это уравнение определяет всю окружность) $x^2 + (y-1)^2 = 1$ за исключением точки O(0,0)).

Итак, $r_1(\varphi) = 0, r_2(\varphi) = 2\sin\varphi$

б)) $x^2 + (y-2)^2 = 4 \Rightarrow r^2\cos^2\varphi + (r\sin\varphi - 2)^2 = 4$

$r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi - 4r\sin\varphi + 4 = 4 \Rightarrow r^2 - 4r\sin\varphi = 0 \Rightarrow r(r - 4\sin\varphi) = 0$

$r_3 = 0$, $r_4 = 4\sin\varphi -$ описывает всю окружность $x^2 + (y-2)^2 = 4$ за исключением точки O(0,0)).

Подынтегральная функция имеет вид $xy^2 = r\cos\varphi r^2\sin^2\varphi = = r^3\cos\varphi\sin^2\varphi$. Угол φ меняется от 0 до π (I и II четверти). Чтобы найти, как меняется r проведем радиус и отметим точки входа и выхода. Точка входа A лежит на окружности $r = 2\sin\varphi$, а точка выхода B – на окружности $r = 4\sin\varphi$, т.е. $2\sin\varphi \le r \le 4\sin\varphi$. Используя формулу перехода к полярным координатам в двойном интеграле, имеем

$$\iint\limits_D xy^2 dxdy = \iint\limits_D r^3\sin^2\varphi\cos\varphi\, r dr d\varphi = \int\limits_0^\pi d\varphi \int\limits_{2\sin\varphi}^{4\sin\varphi} r^4\sin^2\varphi\cos\varphi\, dr =$$

$$= \int\limits_0^\pi \sin^2\varphi\cos\varphi\, d\varphi \int\limits_{2\sin\varphi}^{4\sin\varphi} r^4 dr = \frac{1}{5}\int\limits_0^\pi \sin^2\varphi\cos\varphi\, r^5 \Big|_{r=2\sin\varphi}^{r=4\sin\varphi} =$$

$$= \frac{1}{5}\int\limits_0^\pi \sin^2\varphi\cos\varphi\,(1024\sin^5\varphi - 32\sin^5\varphi)d\varphi = \frac{992}{5}\int\limits_0^\pi \sin^7\varphi\cos\varphi\, d\varphi =$$

$$= \frac{992}{5} \int_0^{\pi} sin^7 \varphi \, d \, sin \, \varphi = \frac{992}{5} \frac{sin^8 \varphi}{8} \Big|_0^{\pi} = 0$$

Ответ: 0.

§2. ТРОЙНОЙ ИНТЕГРАЛ

2.1.Определение тройного интеграла

Пусть функция f *(x,y,z)* непрерывна в ограниченной замкнутой пространственной области *B*. Разобьем ее произвольным образом на n частей $B_i, i = 1, \dots, n$. Через ΔV_i обозначим объемы этих областей B_i, а через $d_i, i = 1, \dots, n -$ диаметры B_i. Выберем произвольно точки $P_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$ в каждой из областей B_i и вычислим $f\,(\,P_i)$. Составим интегральную сумму

$$\sum_{k=1}^{n} f\ (\,P_i)\,\Delta V_i \qquad (2.1)$$

Соответствующую данному разбиению области B и данному выбору точек $P_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i), i = 1, \dots, n.$

Определение Если существует конечный предел интегральных сумм при условии, что наибольший из диаметров d_i стремится к нулю и этот предел не зависит ни от способа разбиения области *B* на части, ни от выбора точек P_i, то его называют тройным интегралом от функции f *(x,y,z)* по области B и обозначают

$$\iiint_B f\ (x, y, z) dxdydz = \lim_{\max\ d_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f\ (P_i)\,\Delta V_i \qquad (2.2)$$

Свойства тройного интеграла аналогичны свойствам двойного интеграла.

2.2. Вычисление тройного интеграла в декартовых координатах.

Пусть область интегрирования

$B = \{(x, y, z): (x, y) \in B_{xy}, z_1(x, y) \le z \le z_2(x, y)\}$, где B_{xy} − проекция B на плоскость xOy, $z_1(x, y)$, $z_2(x, y)$ − непрерывные функции (рисунок 14).

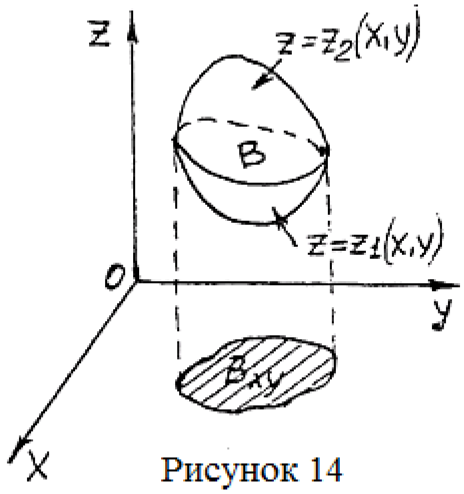

Рисунок 14

Тогда

$$\iiint\limits_{B} f\,(x, y, z)dxdydz = \iint\limits_{B_{xy}} dxdy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f\,(x, y, z)dz \qquad (2.3)$$

То есть вычисление тройного интеграла сводится к последовательному вычислению определенного интеграла по переменной z (при этом x, y рассматриваются как постоянные) и двойного интеграла с переменными x, y по области B_{xy}

Если к тому же известно, что

$B_{xy} = \{(x, y): a \le x \le b, y_1(x) \le y \le y_2(x)\}$

то из равенства (2.3) получим

$$\iiint\limits_{B} f\,(x, y, z)dxdydz = \int\limits_{a}^{b} dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f\,(x, y, z)dz$$

Пример 9. Вычислить тройной интеграл $\iiint_G xzdxdydz$, если область G ограничена плоскостями: $x = 0, y = 0, z = 0, x + y + z = 1$

Решение. Построим данные плоскостями (рисунок 15).

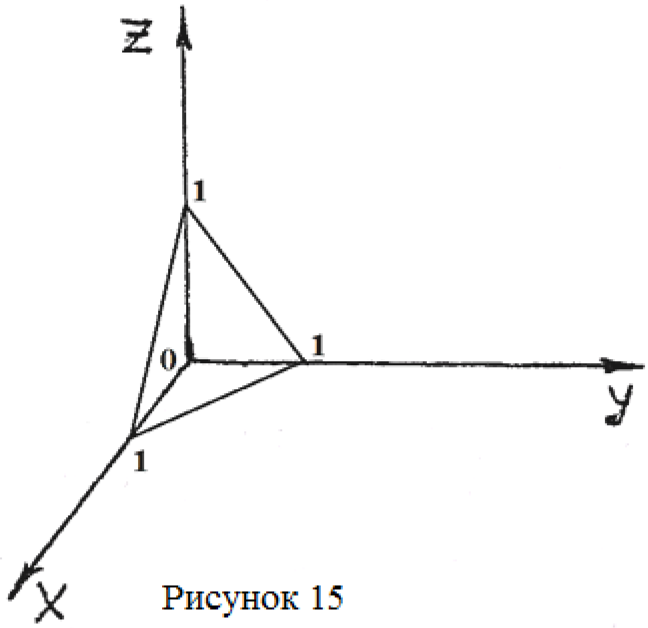

Рисунок 15

Ограниченная ими область G есть тетраэдр $OABC$. Снизу область ограничена плоскостью $z = 0$, сверху – плоскостью $x + y + z = 1$ (или $z = 1 - x - y$). Поэтому по формуле вычисления тройного интеграла имеем

$$\iiint\limits_{G} xzdxdydz = \iint\limits_{G_{xy}} dxdy \int\limits_{0}^{1-x-y} xz\,dz$$

Вычислим внутренний интеграл по z, считая при этом x, y —постоянными величинами

$$\iint\limits_{G_{xy}} xdxdy \int\limits_{0}^{1-x-y} zdz = \iint\limits_{G_{xy}} xdxdy \left.\frac{z^2}{2}\right|_{0}^{1-x-y} = \frac{1}{2}\iint\limits_{G_{xy}} x(1-x-y)^2 dxdy =$$

$$= \frac{1}{2}\iint_{G_{xy}} x(1 - 2(x+y) + (x+y)^2)dxdy =$$

$$= \frac{1}{2}\iint\limits_{G_{xy}} (x - 2x^2 - 2xy + x(x^2 + 2xy + y^2))dxdy =$$

$$= \frac{1}{2}\iint\limits_{G_{xy}} (x - 2x^2 - 2xy + x^3 + 2x^2y + xy^2)dxdy$$

Вычислим теперь полученный двойной интеграл по области G_{xy}.

Эта область – простая и относительно оси Ox и относительно Oy.

Имеем

$$\frac{1}{2}\iint\limits_{G_{xy}}(x-2x^2-2xy+x^3+2x^2y+xy^2)dxdy=\frac{1}{2}\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^{1-x} x-2x^2-2xy+$$

$$+x^3+2x^2y+xy^2)dy=\frac{1}{2}\int\limits_0^1\left(xy-2x^2y-\frac{2xy^2}{2}+x^3y+\frac{2x^2y^2}{2}+x\frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_{y=0}^{y=1-x}dx$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_0^1\left[x(1-x)-2x^2(1-x)-x(1-x)^2+x^3(1-x)+x^2(1-x)^2+\frac{x}{3}(1-x)^3\right]dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_0^1\left(\frac{x}{3}-3x^2+3x^3+2x^2-x^3-x^4+x^2-2x^3+x^4+x-x^2+x^3-\frac{x^4}{3}\right)dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_0^1\left(\frac{x}{3}-x^2+x^3-\frac{x^4}{3}\right)dx=\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{6}-\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}-\frac{x^5}{15}\right)\Bigg|_0^1=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{15}\right)=\frac{10-20+15-4}{120}=\frac{1}{120}$$

Ответ: $\frac{1}{120}$.

2.3. Замена переменных в тройном интеграле. Цилиндрические и сферические координатны.

Замена переменных в тройном интеграле производится аналогично то, как это делается в двойном интеграле:

$$\iiint\limits_{В} f(x,y,z)dxdydz=\iiint\limits_{G} f(x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w))|J|dudvdw \qquad (2.4)$$

где

$$J = \frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)} = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v & x'_w \\ y'_u & y'_v & y'_w \\ z'_u & z'_v & z'_w \end{vmatrix} \neq 0$$

Чаще всего используются цилиндрические и сферические координаты

а) цилиндрические координаты

$$\begin{cases} x = rcos\varphi & 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ y = rsin\varphi & 0 \leq r < \infty \\ z = z & -\infty < z < +\infty \end{cases} \quad (2.5)$$

$$|J| = r$$

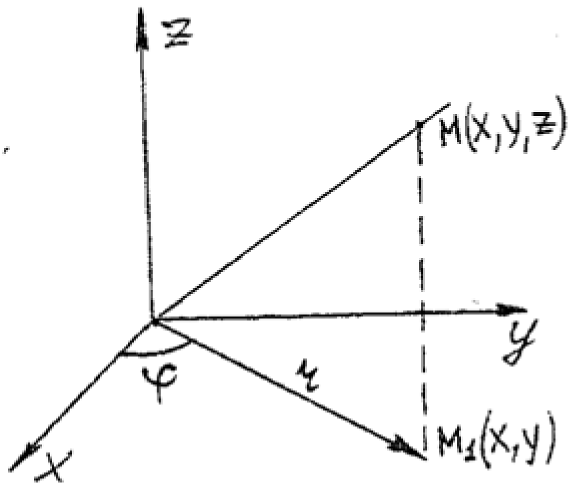

Рисунок 16

$$\iiint\limits_{B} f(x,y,z)dxdydz = \iint\limits_{G_{r\varphi}} d\varphi dr \int\limits_{z_1(r,\varphi)}^{z_2(r,\varphi)} f(rcos\,\varphi, rsin\,\varphi, z)rdz \qquad (2.6)$$

б) сферические координаты

$$\begin{cases} x = rsin\,\theta\,cos\varphi & 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ y = rsin\,\theta\,sin\varphi & 0 \leq r < \infty \\ z = rcos\,\theta & 0 < \theta < \pi \end{cases} \quad (2.7)$$

$$|J| = r^2 \sin\theta$$

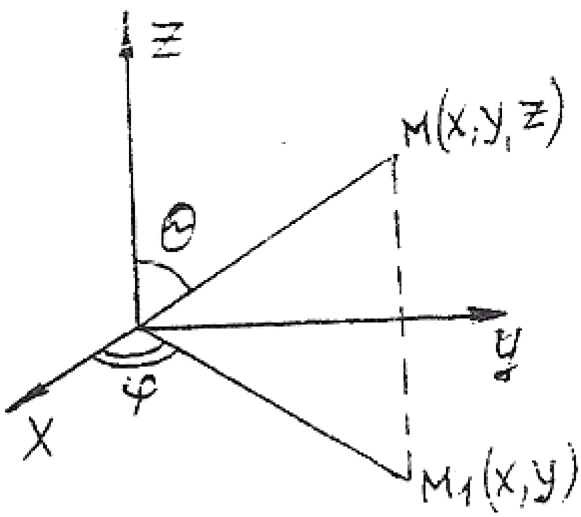

Рисунок 17

$$\iiint\limits_{B} f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_{G} f(rsin\theta\cos\varphi, rsin\,\theta\, sin\,\varphi, rcos\,\theta)r^2\sin\theta drd\varphi d\theta \quad (2.8)$$

Пример 10. Вычислить $\iiint_G dxdydz,$ где область G ограничена поверхностями $x^2+y^2+z^2-2z=0$ и $x^2+y^2=2-z.$

Решение. Первая поверхность – сфера, вторая поверхность – параболоид. Уравнение сферы преобразуем к виду $x^2+y^2+(z-1)^2=1$. То есть центр в точке (0,0,1), радиус 1. У параболоида вершина в точке (0,0,1), радиус 1. У параболоида вершина в точке (0,0,2), ветви вниз. Сделаем чертеж (рисунок 18)

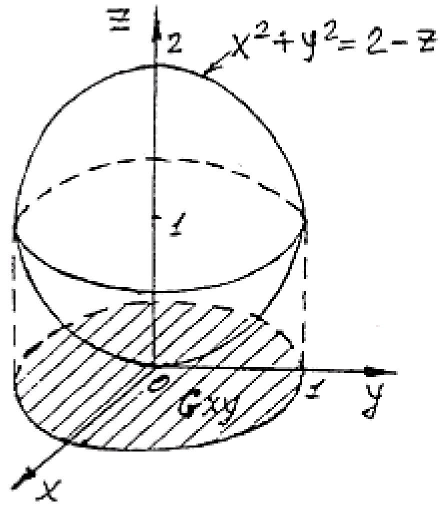

Рисунок 18

Найдем уравнение линии, по которой пересекаются эти поверхности. Очевидно, что это окружность. Определим, на какой высоте z над плоскостью *xOy* расположена эта окружность. Подставляя выражение x^2+y^2 из второго уравнения в первое, получим

$(2-z)+(z-1)^2=1$ или $2-z+z^2-2z+1=1 \Rightarrow z^2-3z+2=0,$

$z_1=1;\ z_2=2.$

Но точка (0,0,2) – это вершина параболоида, поэтому линия пересечения поверхностей находится на высоте $z=1$ над плоскостью *xOy*. Уравнение этой линии получим, подставляя $z=1$ в уравнение любой из данных поверхностей:

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2-2z=0 \\ z=1 \end{cases} \Rightarrow \quad x^2+y^2=1$$

Эта окружность без искажений проектируется в xOy, а все тело проектируется в круг G_{xy}, ограниченный этой окружностью. Так как область снизу ограничена сферой, то выражая z из ее уравнения, получим $z_1 = 1 \pm \sqrt{1-(x^2+y^2)}$. Учтем, что на нижней полусфере $z < 1$, т.е. $z_1 = 1 - \sqrt{1-(x^2+y^2)}$. Сверху область G ограничена параболоидом, поэтому, выражая z из его уравнения, получим $z_2 = 2-(x^2+y^2)$. По правилу вычисления тройного интеграла имеем

$$\iiint\limits_G dxdydz = \iint\limits_{G_{xy}} dxdy \int\limits_{1-\sqrt{1-(x^2+y^2)}}^{2-(x^2+y^2)} dz = \iint\limits_{G_{xy}} dxdy(2-(x^2+y^2)-1+$$

$$+\sqrt{1-(x^2+y^2)}) = \iint\limits_{G_{xy}} (1-(x^2+y^2)+\sqrt{1-(x^2+y^2)})\, dxdy$$

Поскольку область интегрирования круг, то удобно перейти к полярным координатам $x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi$. Тогда подынтегральная функция примет вид $1-r^2+\sqrt{1-r^2}$, а $dxdy$ заменится на $rdrd\varphi$. Так как в круге G_{xy} радиус r меняется от 0 до 1, а угол φ от 0 до 2π, то получим

$$\iint\limits_{G_{xy}} 1-(x^2+y^2)+\sqrt{1-(x^2+y^2)})\, dxdy = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 \left(1-r^2+\sqrt{1-r^2}\right) rdr =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 \left(r-r^3+\sqrt{1-r^2}\cdot r\right) dr = \int\limits_0^{2\pi} \left(\frac{r^2}{2}-\frac{r^4}{4}+\frac{(1-r^2)^{3/2}}{3/2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\right)\Bigg|_0^1 d\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{3}\left[(1-1)^{3/2}-1^{3/2}\right]\right)d\varphi = \frac{7}{12}\int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{7}{6}\pi$$

Ответ: $\frac{7\pi}{6}$

Пример 11. Вычислить тройной интеграл $\iiint_G (x^2+y^2)dxdydz$, если область $G -$ шар $x^2+y^2+z^2 \le 1$

Решение. Начертим область G (рисунок 19)

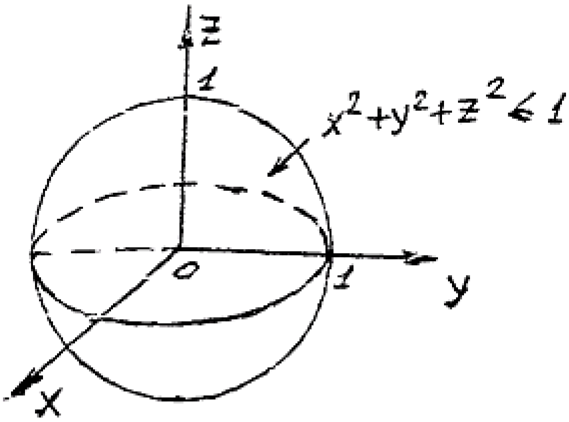

Рисунок 19

В данном случае удобно воспользоваться сферическими координатами

$$x = r\sin\theta\cos\varphi\,,\ \ y = r\sin\theta\sin\varphi,\ \ z = r\cos\theta$$

$$dxdydz \to r^2 \sin\theta drd\varphi d\theta$$

Тогда

$$\iiint\limits_G (x^2 + y^2)dxdydz = \iiint\limits_{G_1} [(r\sin\theta\cos\varphi)^2 + (r\sin\theta\sin\varphi)^2]r^2 \sin\theta\, drd\varphi d\theta =$$

$$= \iiint r^4 \sin^3\theta drd\varphi d\theta = \int\limits_0^1 dr \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi} r^4 \sin^3\theta d\theta = \int\limits_0^1 r^4 dr \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi} \sin^2\theta \sin\theta d\theta =$$

$$= \int\limits_0^1 r^4 dr \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi} (\cos^2\theta - 1)d\cos\theta = \int\limits_0^1 r^4 dr \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \left(\frac{\cos^3\theta}{3} - \cos\theta\right)\Bigg|_0^{\pi} =$$

$$= \int\limits_0^1 r^4 dr \int\limits_0^{2\pi} \left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{3} + 1 + 1\right) d\varphi = \frac{4}{3}\int\limits_0^1 r^4 dr \int\limits_0^{2\pi} d\varphi = \frac{4}{3} 2\pi \frac{r^5}{5}\Bigg|_0^1 = \frac{8\pi}{15}$$

Ответ: $\frac{8\pi}{15}$

§3. ПРИЛОЖЕНИЯ КРАТНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

3.1. Геометрические приложения

а) *Вычисление площадей плоских фигур*

$$S_D = \iint\limits_D dxdy \tag{3.1}$$

б) *Вычисление объема цилиндрического тела*

Если тело ограничено сверху непрерывной поверхностью $z = f(x, y)$ снизу плоскостью $z = 0$ и сбоку цилиндрической поверхностью, вырезающей на плоскости xOy область D, то объем такого тела вычисляется по формуле

$$V = \iint\limits_D f(x, y)dxdy \tag{3.2}$$

в) *Вычисление площади поверхности*

Площадь гладкой поверхности, заданной уравнением $z = f(x, y)$ определяется формулой

$$S = \iint\limits_D \sqrt{1 + (z'_x)^2 + \left(z'_y\right)^2}\ dxdy \tag{3.3}$$

где $D -$ проекция поверхности на плоскость xOy

г) *Вычисление объема произвольного тела*

Объем произвольного тела G находится по формуле

$$V = \iiint\limits_G dxdydz \tag{3.4}$$

Пример 12. С помощью двойного интеграла вычислить площадь области, ограниченной кривой

$$\left(\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}\right)^2 = \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9}$$

Решение. Удобно ввести так называемые обобщенные полярные координаты, положив $x = 2r\cos\varphi$, $y = 3r\sin\varphi$. Найдем якобиан данного преобразования

$$J = \begin{vmatrix} x'_r & z'_k \\ y'_r & y'_\varphi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2\cos\varphi & -2rsin\,\varphi \\ 3\sin\varphi & 3rcos\,\varphi \end{vmatrix} = 6rcos^2\varphi + 6rsin^2\varphi = 6r,$$

$$|J| = 6r.$$

Преобразуем уравнение кривой:

$$\left(\frac{4r^2cos^2\varphi}{4} + \frac{9r^2sin^2\varphi}{9}\right)^2 = \frac{4r^2cos^2\varphi}{4} - \frac{9r^2sin^2\varphi}{9}$$

$$r^4 = r^2(cos^2\varphi - sin^2\varphi); r^2 = cos2\varphi; r = \sqrt{cos2\varphi}$$

Функция определена, если $cos2\phi \geq 0$, т.е.

$$-\frac{\pi}{2} + 2\pi k \leq 2\varphi \leq \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$-\frac{\pi}{4} + \pi k \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4} + \pi k, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$k = 0 \rightarrow -\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}$$

$$k = 1 \rightarrow \frac{3\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{5\pi}{4}$$

Построим данную область (рисунок 20)

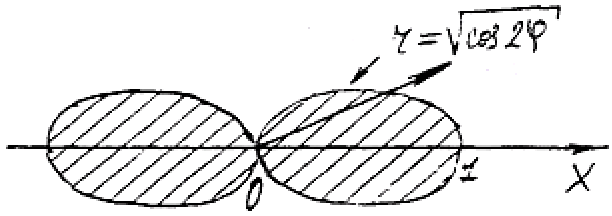

Рисунок 20

В силу симметрии достаточно посчитать площадь половинки лепестка. При этом φ меняется от 0 до $\frac{\pi}{4}$, а радиус от 0 до $\sqrt{cos2\varphi}$, поэтому

$$S_D = 4\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{\sqrt{cos2\varphi}} 6rdr = 24\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \frac{r^2}{2}\Bigg|_0^{\sqrt{\cos 2\varphi}} = 12\int_0^{\frac{\pi}{4}} cos2\varphi d\varphi = \frac{12}{2} sin2\varphi\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} =$$

$$= 6 \cdot 1 = 6(e\partial^2)$$

Ответ: $6e\partial^2$.

Пример 13. Найти объем тела, ограниченного цилиндрическими поверхностями $y = \sqrt{x}, y = 2\sqrt{x}$ и плоскостями $x + z = 6, z = 0$.

Решение. Построим цилиндрические поверхности. Направляющими линиями их являются параболы $y = \sqrt{x}, y = 2\sqrt{x}$, лежащие в плоскости xOy, а образующая параллельна Oz. Построим затем плоскости $x + z = 6, z = 0$.

Данное тело представляет собой цилиндр, который сверху ограничен частью плоскости $x + z = 6$, снизу частью координатной плоскости xOy, заключенной между параболами $y = \sqrt{x}$ и $y = 2\sqrt{x}$ (рисунок 21).

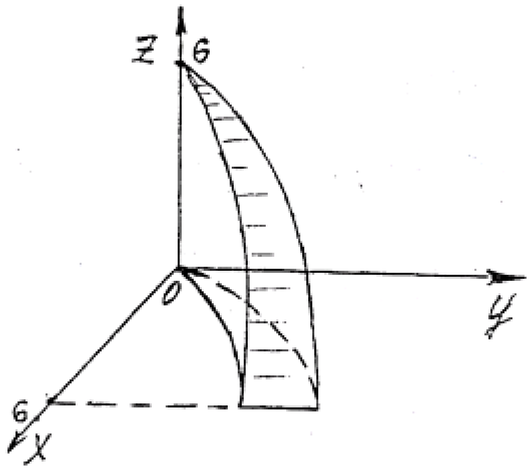

Рисунок 21

Согласно формуле (3.2) объем этого тела равен двойному интегралу:

$$V = \iint_D (6-x)dxdy = \int_0^6 dx \int_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} (6-x)dy = \int_0^6 (6-x)y\Big|_{y=\sqrt{x}}^{y=2\sqrt{x}} dx = \int_0^6 (6-x)\sqrt{x}dx =$$

$$= 6\frac{x^{3/2}}{3/2}\Bigg|_0^6 - \frac{x^{5/2}}{5/2}\Bigg|_0^6 = 4 \cdot 6^{3/2} - \frac{2}{5}6^{5/2} = 24\sqrt{6} - \frac{72}{5}\sqrt{6} = \frac{48}{5}\sqrt{6}(e\partial^3)$$

Пример 14. Вычислить объем тела, ограниченного плоскостями $x + y + z = 4, x = 4, y = 2, x = 0, y = 0, z = 0$.

Решение. Заданные плоскости ограничивают шестигранник G (рисунок 22).

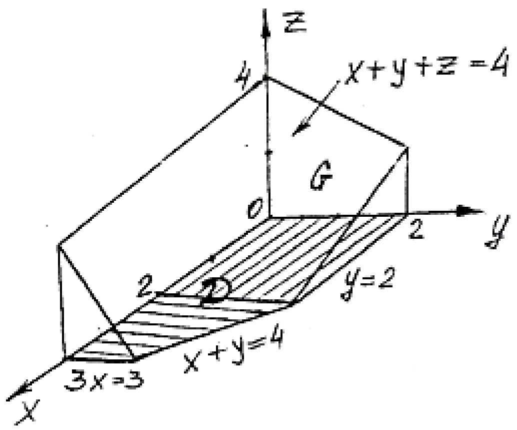

Рисунок 22

Согласно формуле (3.4)

$$V=\iiint\limits_{G}dxdydz=\iint\limits_{D}\left(\int\limits_{0}^{4-x-y}dz\right)dxdy=\iint\limits_{D}(4-x-y)dxdy=$$

$$=\int\limits_{0}^{2}dx\int\limits_{0}^{2}(4-x-y)dy+\int\limits_{2}^{3}dx\int\limits_{0}^{4-x}(4-x-y)dy=$$

$$=\int\limits_{0}^{2}(4y-xy-\frac{y^2}{2})\Big|_{y=0}^{y=2}dx+\int\limits_{2}^{3}(4y-xy-\frac{y^2}{2})\Big|_{y=0}^{y=4-x}dx=$$

$$=2\int\limits_{0}^{2}(3-x)dx+\frac{1}{2}\int\limits_{2}^{3}(16-8x+x^2)dx=2\left(3x-\frac{x^2}{2}\right)\Big|_{0}^{2}+$$

$$+\frac{1}{2}\left(16-4x^2+\frac{x^3}{2}\right)\Big|_{2}^{3}=\frac{55}{6}(e\partial^3)$$

Ответ: $\frac{55}{6}(e\partial^3)$

3.2. Физические приложения кратных интегралов

а) *Вычисление массы*

Если пластинка занимает область D плоскости xOy и имеет поверхностную плотность $f(x,y)$, то масса пластинки выражается двойным интегралом:

$$m = \iint\limits_{D} f(\,x,y)\,dxdy \tag{3.5}$$

Если плотность тела, занимающего область G $f(x,y,z)$, то масса этого тела вычисляется по формуле:

$$m = \iiint\limits_{G} f(\,x,y,z)dxdydz \tag{3.6}$$

б) *Нахождение координат центра тяжести*

Координаты центра тяжести пластинки находятся по формулам

$$x_c = \frac{\iint_D xf(x,y)dxdy}{m}, \quad y_c = \frac{\iint_D yf(x,y)dxdy}{m} \tag{3.7}$$

где $m -$ масса пластинки (формула(3.5)), а величины

$$M_x = \iint_D yf(x,y)dxdy,\ \ M_y = \iint_D xf(x,y)dxdy \tag{3.8}$$

называются статистическими моментами пластинки относительно осей координат Ox и Oy.

Аналогично находятся координаты центра тяжести тела, занимающего область G:

$$x_c = \frac{\iiint_G xf(\,x,y,z)dxdydz}{m}, \quad y_c = \frac{\iiint_G yf(\,x,y,z)dxdydz}{m}$$

$$z_c = \frac{\iiint_G zf(\,x,y,z)dxdydz}{m} \tag{3.9}$$

Величины $M_{yz} = \iiint_G xf(\,x,y,z)dxdydz$

$$M_{xz} = \iiint\limits_{G} yf(\,x,y,z)dxdydz,\ \ M_{xy} = \iiint\limits_{G} zf(\,x,y,z)dxdydz, \tag{3.10}$$

называются статистическими моментами G относительно координатных плоскостей.

в) *Нахождение моментов инерции*

Моменты инерции пластинки относительно осей *Ox*, *Oy* и *Oz*, начала координат *O*, а также относительно координатных плоскостей *xOy*, *xOz*, *yOz*, вычисляются по формулам

$$J_x = \iiint\limits_G (y^2+z^2)\, f(\,x,y,z)dxdydz, \qquad J_y = \iiint\limits_G (x^2+z^2)\, f(\,x,y,z)dxdydz,$$

$$J_z = \iiint\limits_G (x^2+y^2)\, f(\,x,y,z)dxdydz \qquad (3.11)$$

$$J_{xy} = \iiint\limits_G z^2\, f(\,x,y,z)dxdydz, \qquad J_{xz} = \iiint\limits_G y^2\, f(\,x,y,z)dxdydz,$$

$$J_{yz} = \iiint\limits_G x^2\, f(\,x,y,z)dxdydz \qquad (3.12)$$

$$J_O = \iiint\limits_G (x^2+y^2+z^2) f(\,x,y,z)dxdydz$$

Для однородного тела $f(\,x,y,z) = 1$

Пример 15. Найти массу тела с плотностью $f(\,x,y,z) = x+y+z$, ограниченного плоскостями $x=0, x=1, y=0, y=1, z=0, z=1$.

Решение. Тело, массу которого мы находим, является прямоугольным параллелепипедом. Согласно формуле (3.6) имеем

$$m = \int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^1 (x+y+z)dz = \int_0^1 dx \int_0^1 \frac{(x+y+z)^2}{2}\Bigg|_{z=0}^{z=1} dy =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 dx \int_0^1 [(x+y+1)^2 - (x+y)^2]\, dy =$$

$$= \frac{1}{6}\int_0^1 [(x+y+1)^3 - (x+y)^3]\Bigg|_0^1 dx =$$

$$= \frac{1}{6}\int_0^1 [(x+2)^3 - (x+1)^3 - (x+1)^3 + x^3] =$$

$$= \frac{1}{6}\left[\frac{(x+2)^4}{4} - \frac{(x+1)^4}{2} + \frac{x^4}{4}\right]\Bigg|_0^1 = \frac{3}{2}$$

Ответ: $\frac{3}{2}$

Пример 16. Найти координаты центра тяжести однородного тела, ограниченного параболоидом $y = 3 - x^2 - z^2$ и плоскостью $y = 0 (y \geq 0)$ (рисунок 23).

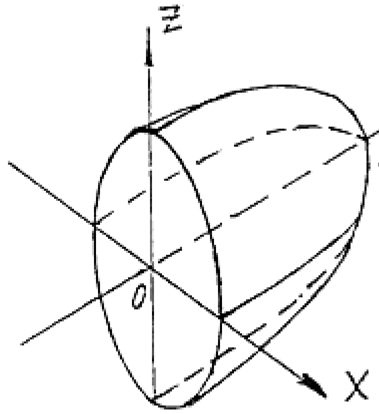

Рисунок 23

Решение. Так как тело однородно, то $f(x, y, z) = 1$. В силу симметрии тела относительно координатных плоскостей yOz и xOy $x_c = z_c = 0$. Для нахождения y_c найдем массу тела m. Введем цилиндрические координаты

$$x = r\cos\varphi, z = r\sin\varphi, y = y.$$

Тогда имеем

$$m = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\sqrt{3}} r dr \int_0^{3-r^2} dy = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\sqrt{3}} r \cdot y \Bigg|_{y=0}^{y=3-r^2} dr = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\sqrt{3}} r(3 - r^2) dr =$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \left(\frac{3}{2}r^2 - \frac{r^4}{4}\right)\Bigg|_0^{\sqrt{3}} = 4\left(\frac{9}{2} - \frac{9}{4}\right)\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi = \frac{9\pi}{2}$$

$$y_c = \frac{\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{3}} r dr \int_0^{3-r^2} y dy}{\frac{9\pi}{2}} = \frac{2}{9\pi}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\sqrt{3}} r\left(\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_{y=0}^{y=3-r^2} dr =$$

$$= \frac{1}{9\pi}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\sqrt{3}} r(3-r^2)^2\, dr = -\frac{1}{18\pi}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\sqrt{3}} r(3-r^2)\, d(3-r^2) =$$

$$= -\frac{1}{18\pi}\int\limits_0^{2\pi} \frac{(3-r^2)^3}{3}\Bigg|_0^{\sqrt{3}} d\varphi = \frac{1}{2\pi}\varphi\Bigg|_0^{2\pi} = 1$$

Ответ: $x_c = z_c = 0;\ y_c = 1.$

Пример 17. Вычислить момент инерции однородной пирамиды относительно координатной плоскости xOy, если пирамида ограничена плоскостями $x + y + z = 1, x = 0, y = 0, z = 0.$

Решение. Согласно формулам (3.12) имеем

$$J_{xy} = \iiint\limits_G z^2 dxdydz = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} dy \int\limits_0^{1-x-y} z^2 dz = \frac{1}{3}\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} z^3 \Bigg|_0^{1-x-y} dy =$$

$$= \frac{1}{3}\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} (1-x-y)^3\, dy = -\frac{1}{12}\int\limits_0^1 (1-x-y)^4\Bigg|_0^{1-x} dx =$$

$$= \frac{1}{12}\int\limits_0^1 (1-x)^4 = -\frac{1}{60}(1-x)^5\Bigg|_0^1 = \frac{1}{60}$$

Ответ: $\frac{1}{60}$

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

1. Представить двойной интеграл $\int_D f(x,y)dxdy$ в виде двукратного, причем расставить пределы D интегрирования в том и другом порядке, если область D ограничена линиями.

1.1) $y = 0, y = \sqrt{x},\ x + y = 6\ (y \geq 0)$

1.2) $y = x^2,\ y = 4 - x^2$

1.3) $y = \frac{2}{x},\ y = x, y = 2x$

1.4) $y = x,\ y = 2x,\ x + y = 6$

1.5) $y = 2x,\ 2y - x = 0,\ xy = 2$

1.6) $y = 2x,\ y = 2x^2,\ x = 2$

1.7) $y = 2x,\ y = 4 - 2x^2,\ y = 0$

1.8) $y = 2x,\ y = 4 - 2x,\ x = 0$

1.9) $y = x,\ xy = 1,\ x = 2$

1.10) $x + y = 10, x - y = 4, y = 0, y = x^3$

1.11) $y = 0, y = 1, x + y = 1, x^2 + y^2 = 1\ (x < 0)$

1.12) $y = 0, y = \sqrt{x},\ x + y = 6$

1.13) $x = 0, y = \sqrt{x},\ x + y = 6$

1.14) $x = 0, x = 2,\ y = e^{-2x}, y = 2x + 1$

1.15) $x = 1, x = e,\ y = \ln x, y = 2x$

1.16) $y = 0, y = 2, x - y = 1, x + y^2 = 7$

1.17) $x = 0, x = 1, y - x^2 = 0, y = 3\sqrt{x}$

1.18) $x = -2, x = 3, y = x^2 - 1, y - x = 5$

1.19) $y = -3, y = 2, x - y + 2 = 0, x + y^2 = 4$

1.20) $x = \frac{1}{2}, x = 1, y = 0, y = \sqrt{2x - x^2}$

2. Изменить порядок интегрирования. Область интегрирования изобразить на чертеже.

2.1) $\int\limits_{0}^{3} dx \int\limits_{3x^2}^{12x} f(x,y)dy$

2.2) $\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{x/3}^{\sqrt{x}} f(x,y)dy$

2.3) $\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{2x}^{3x} f(x,y)dy$

2.4) $\int\limits_{0}^{2} dx \int\limits_{\frac{3x^2}{2}}^{4-(x-1)^2} f(x,y)dy$

2.5) $\int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy$

2.6) $\int\limits_{0}^{2} dx \int\limits_{2x}^{6-x} f(x,y)dy$

2.7) $\int\limits_{0}^{2} dx \int\limits_{e^{-x}}^{x+2} f(x,y)dy$

2.8) $\int\limits_{1}^{3} dx \int\limits_{\ln x}^{x+2} f(x,y)dy$

2.9) $\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{\sqrt{1-x^2}}^{x+4} f(x,y)dy$

2.10) $\int\limits_{0}^{2} dx \int\limits_{\frac{x}{2}-1}^{6-x^2} f(x,y)dy$

2.11) $\int\limits_{0}^{4} dy \int\limits_{\sqrt{y}}^{2+y} f(x,y)dx$

2.12) $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{y^2/2}^{\sqrt{3-y^2}} f(x,y)dx$

2.13) $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x,y)dx$

2.14) $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{2y}^{3-y} f(x,y)dx$

2.15) $\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{\frac{x^2}{4}}^{\sqrt{4x}} f(x,y)dy + \int\limits_{1}^{2\sqrt{2}} dx \int\limits_{\frac{x^2}{4}}^{2} f(x,y)dy$

2.16) $\int\limits_{0}^{2} dx \int\limits_{-1}^{1-x} f(x,y)dy + \int\limits_{-1}^{0} dx \int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy$

2.17) $\int\limits_{-4}^{0} dy \int\limits_{\sqrt{\frac{4-y}{2}}}^{2} f(x,y)dx + \int\limits_{0}^{4} dy \int\limits_{\sqrt{\frac{4-y}{2}}}^{\sqrt{4-y}} f(x,y)dx$

2.18) $\int\limits_{1/e}^{1} dy \int\limits_{-\ln y}^{1} f(x,y)dx + \int\limits_{1}^{e} dy \int\limits_{\ln y}^{1} f(x,y)dx$

2.19) $\int\limits_{0}^{\sqrt{13}} dx \int\limits_{0}^{6} f(x,y)dy + \int\limits_{\sqrt{13}}^{4} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{49-x^2}} f(x,y)dy$

2.20) $\int\limits_{-2}^{e} dy \int\limits_{-1}^{y+1} f(x,y)dx + \int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx$

2.21) $\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{0}^{x^2} f(x,y)dy + \int\limits_{1}^{3} dx \int\limits_{0}^{\frac{1}{2}(3-x)} f(x,y)dy$

3. Вычислить двойные интегралы

3.1) $\iint\limits_{D} xydxdy,\ D: y = \sqrt{x}, y = 2\sqrt{x}, x = 1$

3.2) $\iint\limits_{D} (x-y)dxdy,\ D: y = 0, y = 1, x = 0, x + y = 3$

3.3) $\iint\limits_{D} (y-2)dxdy,\ D: y = x^2, y = 2x^2, x = 1$

3.4) $\iint\limits_{D} \frac{dxdy}{y^2},\ D: y = -10x, y = 11 - x^2$

3.5) $\iint\limits_{D} \frac{y^3}{x^2}dxdy,\ D: x = \frac{1}{3}, x = 1, y = \frac{x}{3}, y = \sqrt{x}$

3.6) $\iint\limits_{D} (x+2y)dxdy,\ D: y = x^2, x = y^2$

3.7) $\iint\limits_{D} \sin(x+y)\, dxdy,\ D: y = 0, y = \frac{\pi}{4}; x = y, x + y = \frac{\pi}{2}$

3.8) $\iint\limits_D \sqrt{x^2 - y^2)} dxdy,\ D$: треугольник с вершинами $O(0,0), A(1,-1), B(1,1)$

3.9) $\iint\limits_D e^{x/y} dxdy,\ D: y = x^2, x = 0, y = 1$

3.10) $\iint\limits_D \frac{xdxdy}{x^2 + y^2},\ D: y = x, y = \frac{x^2}{2}$

3.11) $\iint\limits_D (9x^2y^2 + 48x^3y^3)dxdy,\ D: y = \sqrt{x}, y = -x^2, x = 1$

3.12) $\iint\limits_D (2xy + y^2)dxdy,\ D: y = x, y = 2x, x = 1$

3.13) $\iint\limits_D xydxdy,\ D: y = x, y = \sqrt{x}$

3.14) $\iint\limits_D (2x + y)dxdy,\ D: y = 6 - x^2, y = x$

3.15) $\iint\limits_D (2x - 3y)dxdy,\ D: y = x^2, y = -x, x = 1$

4. Вычислить площадь области D(при необходимости перейти к полярным координатам).

4.1) $D: xy = 6, x + y = 7$

4.2) $D: y^2 = 4x, x + 3y = 0$

4.3) $D: y = x^2, 4y = x^2, x = 2$

4.4) $D: r = 2(1 - \cos\varphi), r = 2$(вне кардиоиды)

4.5) $D: r = 2(1 - \cos\varphi), r = 2$(вне окружности)

4.6) $D: r\cos\varphi = 2, r = 4$ (справа от прямой)

4.7) $D: y = x^2 + 1, x = 3 - y$

4.8) $D: 3x - 2y = 6, y = 4 - x^2$

4.9) $D: y - 2x = 0, 2y - x = 0, xy = 2$

4.10) $D: r = 3(1 + \cos\varphi), r = 3\cos\varphi$

5. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями.

5.1) $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{4}=1, x=0, y=0, z=0$

5.2) $z=x^2+y^2, y=x^2, y=1, z=0$

5.3) $y=\sqrt{x}, y=2\sqrt{x}, z=0, x+z=6$

5.4) $z=9-y^2, 3x+4y=12 (y\geq 0), x=0, y=0, z=0$

5.5) $y=4-x^2, 2x+y=4, x=0, y=0, z=0$

5.6) $y=2-x, y^2=2x, z=0$

5.7) $z=x^2+y^2, y=1, y=2x, y=6-x$

5.8) $z=4-y^2, y={x^2}/{2},\ z=0$

5.9) $z=9-x^2, x^2+y^2=9, z=0$

5.10) $z=\ x^2+y^2,\ z=0,\ x^2+y^2=4$

5.11) $z=1-x^2-y^2, z=0, y=x, y=\sqrt{3}x$

5.12) $x^2+y^2=2x, z=0,\ x^2+y^2=z^2$

5.13) $x^2+y^2+z^2=4, x^2+y^2=2y$

5.14) $z=12-x-y, z=0, x=0, x=4, y=0, y=4$

5.15) $4z=x^2+y^2, z=4$

6. Вычислить площадь поверхности с помощью двойного интеграла.

6.1) части плоскости $6x+3y+2z=12$, которая заключена в первом октанте

6.2) части конуса $z=\sqrt{x^2+y^2}$, отсеченной плоскостью $z=1$

6.3) параболоида $2z=x^2+y^2$, вырезанную цилиндром $x^2+y^2=1$

6.4) сферы $x^2+y^2+z^2=100$, заключенную между плоскостями $x=-8, x=6$

ГЛАВА II

КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

§4. КРИВОЛИНЕЙНЫЙ ИНТЕГРАЛ ПЕРВОГО РОДА

4.1.Понятие криволинейного интеграла первого рода

Пусть *f (P)=f (x,y)* есть функция непрерывная в некоторой области на плоскости *xOy* и *l* – некоторая плоская кусочно-гладкая кривая, расположенная в этой области. Разобьем кривую системой точек на элементарные дуги $l_1, l_2, \dots, l_n$. На каждой элементарной дуге l_i

$(i = 1,2,3, \dots n)$ произвольную точку $P_i(x_i, y_i)$ и умножим значение функции f в этой точке на длину Δs_i элементарной дуги l_i. Сумма таких произведений по всем элементарным дугам:

$$\sum_{i=1}^{n} f\ (P_i)\, \Delta s_i \tag{4.1}$$

называется *интегральной суммой*. Обозначим max Δs_i наибольшую из длин всех элементарных дуг.

<u>Определение</u>. *Криволинейным интегралом первого рода* $\int_l f(P)ds$ от функции $f(P)$ *по кривой* l *называется предел интегральных сумм при условии* $\max \Delta s_i \to 0$, т.е. при неограниченном увеличении числа элементарных дуг, когда все элементарные дуги стягиваются в точку:

$$\int_l f(P)ds = \lim_{\max \Delta s_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f\ (P_i)\, \Delta s_i \tag{4.2}$$

4.2.Свойства криволинейных интегралов первого рода

Криволинейный интеграл первого рода обладает следующими простейшими свойствами

1) $\int\limits_l (C_1 f_1 + C_2 f_2)\, ds = C_1 \int\limits_l f_1 ds + C_2 \int\limits_l f_2\, ds$;

2) если кривая l состоит из двух кривых l_1 и l_2, то

$$\int_l f(P)ds = \int_{l_1} f(P)ds + \int_{l_2} f(P)ds\,;$$

3)криволинейный интеграл первого рода не зависит от направления дуги интегрирования, т.е. $\int_{AB} f(P)ds = \int_{BA} f(P)ds$

4.3. Вычисление криволинейных интегралов первого рода.

Для вычисления криволинейного интеграла первого рода пользуются одной из следующих формул:

а) если кривая задана уравнением $y = \varphi(x)$ $(a \le x \le b)$, то

$ds = \sqrt{1 + [\varphi'(x)]^2}dx$ и $\int_l f(P)ds = \int_a^b f[x, \varphi(x)]\sqrt{1 + [\varphi'(x)]^2}dx$ (4.3)

б) если кривая задана параметрически: $x = \varphi(t), y = \phi(t)$ $(\alpha \le t \le \beta)$, то

$ds = \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\phi(t)]^2}dt$ и $\int_l f(P)ds =$

$\int_a^b f[\varphi(t), \phi(t)]\sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\phi(t)]^2}dt$ (4.4)

в) если кривая задана уравнением $r = r(\varphi)$ $(\varphi_1 \le \varphi \le \varphi_2)$, то

$\int_l f(P)ds = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\sqrt{r^2 + (r')^2}\, d\varphi$ (4.5)

Аналогично определяются криволинейные интегралы от непрерывной в некоторой пространственной области функции $f(M) = f(x, y, z)$ по длине пространственной кусочно-гладкой кривой L, расположенной в этой области, т.е.

$$\int_L f(M)ds = \lim_{\max \Delta s_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f\,(M_i)\,\Delta s_i$$

Если кривая задана параметрическими уравнениями

$x = x(t), y = y(t), z = z(t), (\alpha \le t \le \beta)$

то

$ds = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2}dt$

и

$$\int_L f(M)ds = \int_\alpha^\beta f[x(t), y(t), z(t)]\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2}dt \qquad (4.6)$$

Пример 1. Вычислить $\int_l \frac{ds}{\sqrt{x^2+y^2+4}}$, где l —отрезок прямой, соединяющий точки $O(0,0)$ и $A(1,2)$.

Решение. Запишем уравнение прямой l: $y = 2x$. Для данной линии $ds = \sqrt{1+2^2}dx = \sqrt{5}dx$. При движении от O к A x меняется от 0 до 1.

По формуле (3) имеем

$$\int\limits_l \frac{ds}{\sqrt{x^2+y^2+4}} = \int\limits_0^1 \frac{\sqrt{5}dx}{\sqrt{x^2+4x^2+4}} = \sqrt{5}\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{5x^2+4}} = \int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+\frac{4}{5}}} =$$

$$= ln\left|x+\sqrt{x^2+\frac{4}{5}}\right|\Bigg|_0^1 = ln\left|1+\frac{3}{\sqrt{5}}\right| - ln\left|\frac{2}{\sqrt{5}}\right| = ln\left|\frac{\sqrt{5}+3}{2}\right|$$

Пример 2. Вычислить $\int_l \sqrt{y^2+z^2}ds$, где l —контур окружности $y^2 + z^2 = ay(a > 0)$.

Решение. Введем полярные координаты:

$$y = rcos\,\varphi, z = rsin\,\varphi.$$

Уравнение окружности принимает вид:

$$r^2 = arcos\,\varphi \text{ или } r = acos\,\varphi;$$

Тогда

$r' = -a\,sin\,\varphi$ и $ds = \sqrt{a^2cos^2\varphi + a^2sin^2\varphi}d\varphi = ad\varphi.$

Так как окружность расположена в той части плоскости Oxy, где $y \geq 0$, то угол φ меняется от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$. По формуле (4.5) имеем

$$\int\limits_l \sqrt{y^2+z^2}ds = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} rad\varphi = a^2 \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi d\varphi = a^2\,sin\,\varphi\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = a^2 + a^2 = 2a^2.$$

Пример 3. Вычислить

$\int_l (2z - \sqrt{x^2+y^2}ds,$

где l —дуга кривой, заданной параметрически $x = tcos\, t, y = tsin\, t, z = t$ $(0 \leq t \leq 2\pi)$.

Решение. Так как $ds = \sqrt{(x')^2 + (y')^2 + (z')^2}, dt = \sqrt{2 + t^2}dt,$ то по формуле (6) имеем

$$\int\limits_L (2z - \sqrt{x^2 + y^2}ds = \int\limits_0^{2\pi} \left(2t - \sqrt{t^2cos^2t + t^2sin^2t}\right)\sqrt{2 + t^2}dt = \int_0^{2\pi} t\sqrt{2 + t^2}dt =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{(2+t^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^{2\pi} = \frac{1}{3}\left[(2 + 4\pi^2)^{\frac{3}{2}} - 2\sqrt{2}\right] = \frac{2\sqrt{2}}{3}\left[(1 + 2\pi^2)^{\frac{3}{2}} - 1\right].$$

§5. КРИВОЛИНЕЙНЫЙ ИНТЕГРАЛ ВТОРОГО РОДА

5.1.Понятие криволинейного интеграла второго рода

Криволинейный интеграла второго рода от непрерывной в некоторой области плоскости *xOy* функции $P(x, y)$ по координате x вдоль дуги плоской кусочно-гладкой кривой l, расположенной в этой области, связан с ранее рассмотренным криволинейным интегралом первого рода соотношением:

$$\int\limits_l P(x, y)dx = \int\limits_l P(x, y) \cos \alpha ds,$$

где α —угол между касательной, проведенной к кривой в любой ее точке, и положительным направлением оси *Ox* (рисунок 1).

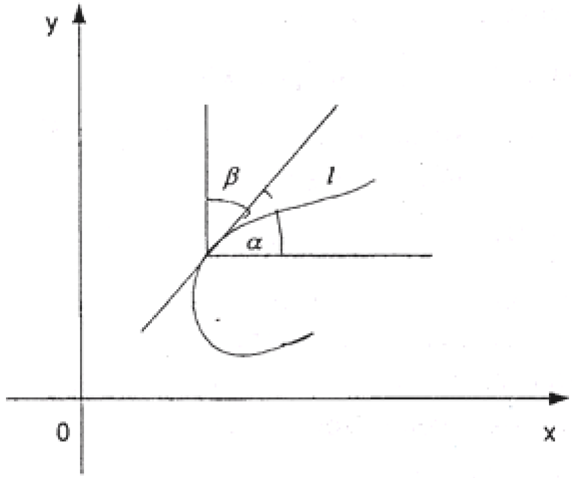

Рисунок 1

Аналогично,

$$\int\limits_{l} Q(x,y)dy = \int\limits_{l} Q(x,y)\cos\beta ds,$$

где β −угол между касательной, проведенной к кривой в любой ее точке, и положительным направлением оси *Oy* (рисунок 1). Очевидно, что

$\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$ и $\cos\beta = \sin\alpha$.

Обычно рассматривают сумму интегралов по координате x и по координате y, которая записывается в виде:

$$\int\limits_{l} P(x,y)dx + Q(x,y)dy, \qquad (5.1)$$

Криволинейные интегралы второго рода обладают теми же простейшими свойствами, что и интегралы первого рода. Однако в отличие о последних они зависят от выбора направления обхода кривой, если изменить направление обхода, то интеграл (5.1) меняет знак, т.е.

$$\int\limits_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = -\int\limits_{BA} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

5.2. Вычисление криволинейных интегралов второго рода

Для вычисления интеграла (5.1) пользуются одной из следующих формул:

а) если кривая задана уравнением $y = \varphi(x)$ и при перемещении из точки A в точку B x меняется от a до b, то

$$\int_{AB} Pdx + Qdy = \int_{a}^{b} P\,[x, \varphi(x)] + Q\,[x, \varphi(x)]\varphi'(x)dx \qquad (5.2)$$

б) если кривая задана уравнением $x = \varphi(t)$, $y = \phi(t)$ и при перемещении из точки A в точку B параметр t меняется от α до β, то

$$\int_{AB} Pdx + Qdy = \int_{\alpha}^{\beta} \{P\,[\varphi(t), \phi(t)]\varphi'(t) + Q\,[\varphi(t), \phi(t)]\phi'(t)\}dt \qquad (5.3)$$

Аналогично определяются криволинейные интегралы второго рода от непрерывных в некоторой пространственной области функций $P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)$, вдоль дуги пространственной кусочно-гладкой кривой l, расположенной в этой области, т.е

$$\int_{l} P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)\,dz.$$

Если кривая задана параметрическим уравнением

$x = x(t), y = y(t), z = z(t)$ $(\alpha \leq t \leq \beta)$,

то

$$\int_{l} P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)\,dz =$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} \{P\,[x(t), y(t), z(t)]x'(t) + Q\,[x(t), y(t), z(t)]y'(t) + R\,[x(t), y(t), z(t)]z'(t)\}\,dt \quad (5.4)$$

Пример 4. Вычислить $\int_{l}(x^2 - 2xz)dx + (z^2 - 2xz)dz$, где l —дуга параболы $z = x^2$, пробегаемая от точки A(-1,1) до точки B(1,1) (рисунок 2).

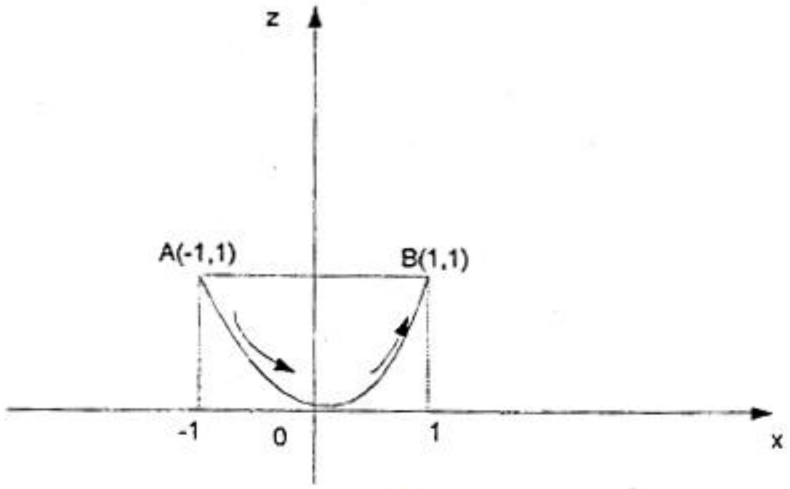

Рисунок 2

Решение. Так как $z = x^2$, $z' = 2x$ и при движении из точки A в точку B x меняется от -1 до 1, то по формуле (5.2) имеем:

$$\int_l (x^2 - 2xz)dx + (z^2 - 2xz)dz = \int_{-1}^{1} \{x^2 - 2x \cdot x^2 + [(x^2)^2 - 2x \cdot x^2]2x\}dx =$$

$$= \int_{-1}^{1} (x^2 - 2x^3 + 2x^5 - 4x^4)dx = \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3} - \frac{4x^5}{5}\right)\Bigg|_{-1}^{1} =$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{4}{5} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{4}{5} = \frac{2}{3} - \frac{8}{5} = -\frac{14}{15}.$$

Пример 5. Вычислить $\int_L xdx + ydy + (x + y - 1)dz$, где L −отрезок прямой, соединяющий точки A(1,1,1) и B(2,3,4).

Решение. Уравнение прямой, проходящей через две данные точки, имеет вид:

$\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{4} (= t)$, или $x = t + 1, y = 2t, z = 3t + 1.$

При передвижении от точки A к точке B параметр t меняется от 0 до 1; по формуле (5.4) имеем:

$$\int_L xdx + ydy + (x+y-1)dz = \int_0^1 (t+1)dt + (2t+1)2dt + (t+1+2t+1-1)3dt =$$

$$= \int_0^1 (14t+6)dt = (7t^2+6t)\Big|_0^1 = 7+6 = 13.$$

§6. ФОРМУЛА ГРИНА

Пусть $l -$ кусочно-гладкий контур на плоскости *xOy*, а *D*- ограниченная этим контуром замкнутая область. В области *D* заданы непрерывные функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$, имеющие в этой области непрерывные частные производные. Тогда справедлива формула Грина

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \oint_l P(x,y)dx + Q(x,y)dy \qquad (6.1)$$

где направление на контуре l выбрано так, чтобы при движении по контуру область D все время оставалась слева (рисунок 3).

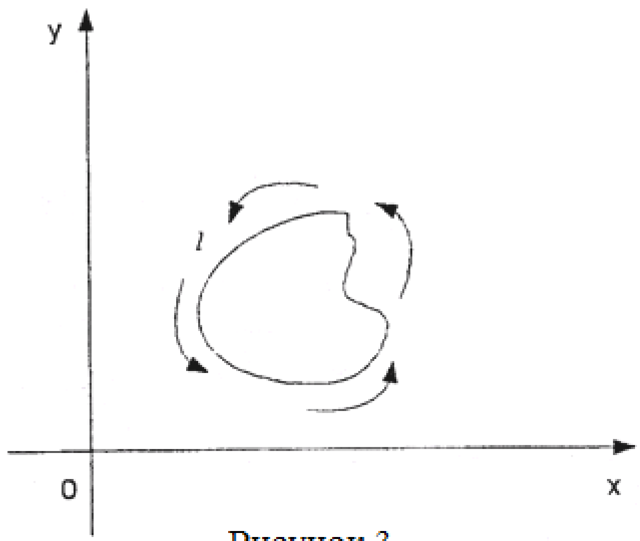

Рисунок 3

Условием независимости криволинейного интеграла

$$\int_l P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

от пути интегрирования является равенство:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \tag{6.2}$$

Если же, кроме того l —контур замкнутый, то

$$\oint_l P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0. \tag{6.3}$$

Пример 6. Применяя формулу Грина, вычислить $\oint_l 2(x^2+y^2)dx + (x+y)^2\,dy,$ где l —контур треугольника с вершинами в точках $A(1,1)$, $B(2,2)$ и $C(1,3)$ (рисунок 4).

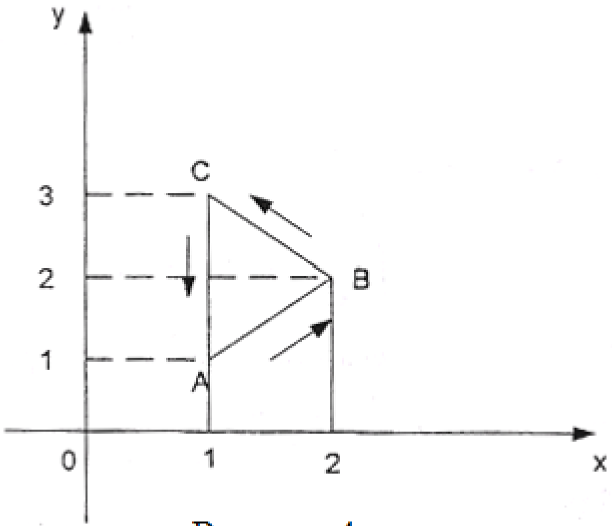

Рисунок 4

Решение. В данном случае $P = 2(x^2+y^2), Q = (x+y)^2$

$\frac{\partial Q}{\partial x} = 2(x+y), \frac{\partial P}{\partial y} = 4y$. Применяя формула Грина, получаем:

$$\oint_l 2(x^2+y^2)dx + (x+y)^2\,dy = \iint_{\Delta ABC} [2(x+y) - 4y]\,dxdy.$$

Вычисляя двойной интеграл, найдем

$$\oint_l 2(x^2+y^2)dx+(x+y)^2\,dy = 2\int_1^2 dx \int_x^{-x+4} (x-y)dy =$$

$$= -\int_1^2 (x+y)^2\Big|_x^{-x+4} dx = -4\int_1^2 (x-2)^2\ dx = -\frac{4}{3}(x-2)^3\Big|_1^2 = \frac{4}{3}.$$

Пример 7. Вычислить $\int_l x^2dx+z^2dz$, где $l-$ верхняя половина окружности $x^2+z^2=4$, пробегаемая по ходу часовой стрелки и лежащая в плоскости *xOz*.

Решение. В данном случае $P=x^2, Q=z^2$, и так как $\frac{\partial P}{\partial x}=\frac{\partial Q}{\partial y}=0$, то результат интегрирования не зависит от пути.

Интегрирование по верхней половине окружности заменим интегрированием по отрезку оси *Ox*, соединяющему точки пересечения окружности A(-2,0) и B(-2,0) с осью *Ox*. На этом отрезке $z=0$ и $dz=0$, а x меняется от -2 до 2. Следовательно:

$$\int_l x^2dx+z^2dz = \int_{-2}^{2} x^2dx = \frac{x^3}{3}\Big|_{-2}^{2} = \frac{8}{3}+\frac{8}{3}=\frac{16}{3}$$

Пример 8. Вычислить $\oint_l \frac{xdy+ydx}{x^2+y^2}$, где l – окружность $(x-1)^2+(y-1)^2=1$, пробегаемая против хода часовой стрелки.

Решение. Контур l –замкнутый, $P=\frac{x}{x^2+y^2}, Q=\frac{y}{x^2+y^2}$ и $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$, поэтому по формуле Грина данный интеграл равен нулю.

§7. ПРИЛОЖЕНИЯ КРИВОЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

1) Площадь области *D*, ограниченной замкнутым контуром *l*, находится по формуле:

$$S = \frac{1}{2}\oint_l xdy - ydx, \qquad (7.1)$$

где направление пути обхода контура *l* выбрано так, что область *D* остается все время слева от пути интегрирования (следствие из формулы Грина).

2) Пусть *l* есть плоская кривая с линейной плотностью массы $\eta(x,y)$, тогда

а)масса *m* кривой *l* вычисляется по формуле:

$$m = \int_l \eta(x,y)\,ds; \qquad (7.2)$$

б) координаты центра тяжести кривой *l* вычисляются по формулам:

$$x_0 = \frac{\int_l x\eta(x,y)\,ds}{m} \text{ и } y_0 = \frac{\int_l y\eta(x,y)\,ds}{m} \qquad (7.3)$$

в) моменты инерции I_x, I_y и I_0 соответственно относительно осей *Ox, Oy* и начала координат равны:

$$I_x = \int_l y^2\eta(x,y)\,ds,\ I_y = \int_l x^2\eta(x,y)\,ds, I_0 = \int_l (x^2 + y^2)\eta(x,y)ds \qquad (7.4)$$

3) Пусть $F = P(x,y)i + Q(x,y)j$ есть переменная сила, совершающая работу *W* вдоль пути *l* и функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ непрерывны на кривой *l;* тогда

$$W = \int_l P(x,y) + \ Q(x,y)\,dy \qquad (7.5)$$

Пример 9. Вычислить площадь области, ограниченной эллипсом $x = a\cos t, y = b\sin t$.

Решение. Из формулы (7.1) следует, что

$$S = \frac{1}{2}\oint_l xdy - ydx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (\mathrm{a}\cos tb\ cost + bsin\ ta\sin t)dt =$$

$$= \frac{ab}{2}\int_0^{2\pi}(cos^2t + sin^2t)dt = \frac{ab}{2}\int_0^{2\pi} dt = \frac{ab}{2}t\Big|_0^{2\pi} = \pi ab.$$

Пример 10. Найти массу четверти эллипса $x = \cos t,\ z = 2\sin t$, расположенного в первом квадранте плоскости *Oxz*, если линейная плотность η = z.

Решение. Из формулы (7.2) следует, что $m = \int_l zds$. Из уравнения кривой l находим:

Очевидно, что параметр t меняется от 0 до $\frac{\pi}{2}$; тогда:

$$m = \int_l zds = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\,sin\,t\sqrt{sin^2t + 4cos^2t}\,dt =$$

$$= -2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + 3cos^2i}d(\cos t) = -2\sqrt{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{1}{3} + cos^2td(\cos t)} =$$

Положив $\cos t = u$, получим:

$$m = -2\sqrt{3}\int_1^0 \sqrt{\frac{1}{3} + u^2du} = 2\sqrt{3}\int_0^1 \sqrt{\frac{1}{3} + u^2du};$$

$$m = 2 + \frac{\sqrt{3}}{3}\ln(\sqrt{3} + 2).$$

Пример 11. Найти координаты центра тяжести однородной дуги циклоиды $x = a(t - \sin t),\ y = a(1 - \cos t)$, если $(0 \le t \le 2\pi)$.

Решение. В силу симметрии кривой относительно прямой $x = \pi$ получаем $x_0 = \pi$. Найдем теперь m, а затем y_0. Из уравнения циклиды находим, что

$$ds = a\sqrt{2}\sqrt{1 - \cos t}\,dt,$$

тогда

$$m=\int_l ds=\int_0^{2\pi} a\sqrt{2}\sqrt{1-\cos t}\,dt=\sqrt{2a}\int_0^{2\pi}\sqrt{1-\cos t}\,dt=$$

$$=2a\int_0^{2\pi} sin\frac{t}{2}dt=-4a\,cos\frac{t}{2}\Big|_0^{2\pi}=4a+4a=8a$$

$$y_0=\frac{\int_l yds}{m}=\frac{\int_0^{2\pi} a(1-\cos t)a\sqrt{2}\sqrt{1-\cos t}\,dt}{8a}=\frac{a}{2}\int_0^{2\pi} sin^3\frac{t}{2}=$$

$$=-a\int_0^{2\pi}\left(1-cos^2\frac{t}{2}\right)d\left(cos\frac{t}{2}\right)=-a\left(cos\frac{t}{2}-\frac{cos^3\frac{t}{2}}{3}\right)\Bigg|_0^{2\pi}=$$

$$=-a\left(-1+\frac{1}{3}-1+\frac{1}{3}\right)=\frac{4a}{3}.$$

Пример 12. Найти моменты инерции относительно координатных осей и начала координат четверти однородной окружности $y=2\cos t, z=2\sin t$, лежащей в первом квадранте плоскости *yOz*.

Решение. В силу одинакового расположения кривой по отношению координатных осей $I_y=I_z$. По формулам (7.4) получаем:

$$I_y=I_z=\int_l z^2ds=4\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^2t\sqrt{4sin^2t+4cos^2t}\,dt=$$

$$=8\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos 2t}{2}dt=4\left(t-\frac{\sin 2t}{2}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=2\pi;$$

$$I_0=\int_l (x^2+y^2)ds=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}(cos^2t+sin^2t)\sqrt{4sin^2t+4cos^2t}dt=$$

$$= 8\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} dt = 8t\Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}} = 4\pi.$$

Пример 13. Вычислить работу силы $F = yzi + (y+z)j$ при перемещении точки массы m из точки $O(0,0)$ в точку $A(1,1)$ по прямой $z = y$, лежащей в плоскости yOz.

Решение. Из формулы (7.5) следует, что

$$W = \int_{l} yzdy + (y+z)dz.$$

Так как мы интегрируем по прямой $z = y$ и при перемещении из точки O в точку A y меняется от 0 до 1, получаем:

$$W = \int_{0}^{1} y\cdot ydy + (y+y)dy = \int_{0}^{1} (y^2 + 2y)dy =$$

$$= \left(\frac{y^3}{3} + y^2\right)\Big|_{0}^{1} = \frac{1}{3} + 1 = \frac{4}{3}$$

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

1. Вычислить криволинейный интеграл первого рода

1.1) $\int\limits_l \frac{ds}{x-y}$, $l-$ отрезок прямой $y=\frac{x}{2}-2,$ заключенный между точками $A(0,-2)$и $B(4,0)$

1.2) $\int\limits_l xyds$, $l-$ контур прямоугольника с вешинами в точках $A(0,0); B(4,0); C(4,2); D(0,2)$

1.3) $\int\limits_l yds$, $l-$ дуга параболы $y^2=4x,$ отсеченная параболой $x^2=4y$

1.4) $\int\limits_l x^2ds$, $l\colon y=\ln x$ от точки $A(1,0)$ до точки $B(2,\ln 2)$

1.5) $\int\limits_l \frac{ds}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $l\colon x-2y=4$ от точки $A(0,-2)$ до точки $B(4,0)$

1.6) $\int\limits_l \sqrt[3]{y^2}ds$, $l\colon y=\sqrt{x^3},\qquad 0\le x\le 2$

1.7) $\int\limits_l \frac{yds}{x}$, $l\colon y=\frac{x^2}{2}$ от точки $A\left(1,\frac{1}{2}\right)$ до точки $B(2,2)$

1.8) $\int\limits_l \sqrt{2y}ds$, $l-$ первая арка циклоиды $x=a(t-\sin t),\ y=a(1-\cos t)$

1.9. $\int\limits_l \sqrt{x^2+y^2}ds$, $l-$ кардиоида $x=a(\cos t+t\sin t),$

$$y=a(\sin t-t\cos t),\ 0\le t\le 2\pi$$

1.10) $\int\limits_l y^2ds$, $l\colon \begin{cases} x=4(t-\sin t) \\ y=4(1-\cos t) \end{cases}$ $0\le t\le 2\pi$

1.11) $\int\limits_l \sqrt{x^2+y^2}ds$, $l\colon \begin{cases} x=t\cos t \\ y=t\sin t \end{cases}$ $0\le t\le 2\pi$

1.12) $\int\limits_l \left(\sqrt[3]{x} + 2\sqrt[3]{y}\right) ds$, l: $x = \cos^3 t$, $y = \sin^3 t, 0 \le t \le \frac{\pi}{2}$

1.13) $\int\limits_l xyds$, l: $\begin{cases} x = 3\cos t) \\ y = 3\sin t) \end{cases}$ $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$

1.14) $\int\limits_l \sqrt{1+2x} ds$, l: $x = \frac{t^2}{2}, y = \frac{t^3}{3}$, $\quad 0 \le t \le 1$

1.15. $\int\limits_l (x - y) ds$, l: $x^2 + y^2 = ax$

1.16) $\int\limits_l x\sqrt{x^2 + y^2} ds$, $l -$ лемниската $(x^2 + y^2)^2 = a^2\,(x^2 + y^2)\ (x \ge 0)$

1.17) $\int\limits_l (x + y) ds$, $l -$ лемниската $(x^2 + y^2)^2 = a^2\,(x^2 + y^2)\ (x \ge 0)$

1.18) $\int\limits_l x^2 ds$, $l -$ дуга окружнности $x^2 + y^2 = a^2\ (y \ge 0)$

1.19) $\int\limits_l x^2 y ds$, $l -$ дуга окружнности $x^2 + y^2 = 4,$ лежащаая в первой

четверти

1.20) $\int\limits_l ye^{-x} ds$, l: $x = l\,n(1 + t^2)$, $y = 2arctg\ t - t, \quad 0 \le t \le 1$

2. Вычислить криволинейный интеграл второго рода

2.1) $\int\limits_l (x^2 - y^2) dx,$ где $l -$ дуга параболы $y = x^2$ от $O(0,0)$ до $A(2,4)$

2.2) $\int\limits_l xydx + (y - x)dy$, где l: $y = x,\ y = x^2, y = x^3$

2.3) $\int\limits_l (x + y)dx - 2ydy,$ где $l -$ прямая AB от $A(0,1)$ до $B(2,5)$

2.4) $\int\limits_l ydx + (x + y)dy$, где $l -$ контур фигуры, ограниченной линиями

$y = x^2, y = 4$

2.5) $\int_l xdy + \left(3 - \frac{3}{2}x\right)dx$, где $l -$ контур треугольника, образованного осями координат и прямой $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$ (против часовой стрелки)

2.6) $\int_l (x + y)dx - 2xdy$ по контуру треугольника со сторонами $x = 0, y = 0, x + y = 4$ (против часовой стрелки)

2.7) $\int_l 4xsin^2ydx + ycos^2 2xdy$ вдоль прямой от точки (0,0) до точки(3,6)

2.8) $\int_l (x^2 + y^2)dy$, где $l -$ контур четырехугольника с вершинами, указанными в порядке обхода, в точках $A(0,0), B(2,0), C(4,4), D(0,4)$

2.9) $\int_l 2xydx - x^2dy$, где $l -$ дуга параболы $x = 2y^2$, пробегаемая от точки $O(0,0)$ до точки $A(2,1)$.

2.10) $\int_l y^2dx + x^2dy$, где $l-$ верхняя половина эллипса $x = a\cos t$, $y = bsint$, пробегаемая по ходу часовой стрелки

2.11) $\int_l (2a - y)dx - (a - y)dy$, где $l-$ арка циклоиды $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t),\ 0 \le t \le 2\pi$

2.12) $\int_l \frac{x^2dy - y^2dx}{x^{5/3} + y^{5/3}+}$, где $l-$дуга кривой $x = Rcos^3t,\ y = Rsin^3t$, пробегаемая от точки $A(R, 0)$ до точки $B(0, R)$

2.13) $\int_l ydx + xdy$, где $l-$четверть дуги окружности $x = Rcos\ t$, $y = Rsin\ t$, лежащая в 1 квадранте и пробегаемая против хода часовой стрелки.

2.14) $\int\limits_l \frac{(x+y)dx-(x-y)dy}{x^2+y^2}$, где l– окружность $x^2+y^2=a^2$

(по часовой стрелке).

2.15) $\int\limits_l xydx-2x^2dy$, где l: $y=x, y=-2x, y=2$

2.16) $\int\limits_l y^2dx-xydy$, где l: $x=\sqrt{4-y}, x=0, y=0$

2.17) $\int\limits_l e^x dx-2xdy$, где l: $x+y=1, x=0, y=0$

2.18) $\int\limits_{(0,0)}^{(2,1)} 2xydx+x^2dy$

2.19) $\int\limits_{(1,1)}^{(3,1)} \frac{(x+2y)dx+ydy}{(x+y)^2}$

2.20) $\int\limits_{(-2,-1)}^{(3,0)} (x^4+4xy^3)dx+(6x^2y^2-5y^4)dy$

2.21) $\int\limits_{(0,0)}^{(1,1)} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}+y\right)dx+\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}+x\right)dy$

3. С помощью формулы Грина вычислить криволинейные интегралы по замкнутому контуру, пробегаемому против часовой стрелки.

3.1) $\oint\limits_l \frac{dx}{y}-\frac{dy}{x}$, где l – контур треугольника с вершинами

точках $(1,1), (2,2), (1,3)$

3.2) $\oint\limits_l 2(x^2+y^2)dx+(x+y)^2dy$, где l – контур треугольника с

вершинами в точках $(1,1), (2,2), (1,3)$

3.3) $\oint\limits_l (1-x^2)ydx+(1+y^2)xdy$, где l: $x^2+y^2=4$

3.4) $\oint\limits_l (xy+x+y)dx+(xy+x-y)dy$, где l: $x^2+y^2=ax$

3.5) $\oint\limits_l (1-x^2)ydx+(1+y^2)xdy$, где l: $x^2+y^2=2y$

3.6) $\oint\limits_l (x+y^3)dy-(y+x^2)xdy$, где $l-$ граница области $y^2 \leq x,\ x^2 \leq y$

3.7) $\oint\limits_l \frac{3}{4}y^2(x^2-2)dx+(1+xy)\frac{x^2}{2}dy$, где $l-$ граница области $y \leq x$,

$x+y \leq 6$

3.8) $\oint\limits_l (x^2-y^2)dx+(x^2+y^2)dy$, где $l-$ граница области $y \leq x$,

$y \leq 2x$, $x+y \leq 1$

3.9) $\oint\limits_l (xy+x^2+y)dx+(xy+x-y^2)dy$, где $l-$ граница области $y \geq x$,

$y=-x, y \leq 3$

3.10) $\oint\limits_l xy^3dx-3dy$, где l: $y=x^2$, $y=-x^2, x=2$

3.11) $\oint\limits_l xy(dx-dy)$, где l: $x=\sqrt{y}$, $x=0, y=4$

3.12) $\oint\limits_l (1-x^2)ydx+(1+y^2)xdy$, где l: $(x^2+y^2)^2=x^2-y^2\ (x \geq 0)$

4. Приложения криволинейных интегралов

4.1) Найти площадь области, ограниченной параболой $x=y^2$ и прямой $x=1$

4.2) Найти площадь области, ограниченной кривой $x=acos^3t, y=asin^3t$

$$0 \leq t \leq 2\pi$$

4.3) Найти площадь области, ограниченной кривой $x=a(2\cos t-\cos 2t)$,

$$y\ = a(2\sin t-\sin 2t)$$

$$0 \le t \le 2\pi$$

4.4) Найти массу участка линии $y = \ln x$ между точками с абсциссами $\sqrt{3}$ и $\sqrt{8}$, если плотность линии в каждой точке равна квадрату абсциссы точки.

4.5) Найти координаты центра тяжести четверти окружности радиуса a, расположенной в 1 квадранте плоскости xOy, если плотность равна 1.

Литература.

1. Будак Б. М., Фомин С. В. Кратные интегралы и ряды. — М., 1965.
2. Ильин В. А., Поздняк Э. П. Основы математического анализа. — М.: Наука, 1967
3. Высшая математика: конспект лекций для студентов 2 курса: учеб. пособие/ Докучаев С.А., Ефименко В.Н., Костецкая Г.С., Прушинская Л.А. – Ростов н/Д:СКФ МТУСИ ,2002.
4. Задачи и упражнения по математическому анализу для втузов: учеб.пособ. / под ред. Б.П. Демидовича. – М.:АСТ:Астрель; Владимир:ВКТ,2010
5. Математический анализ: учеб.пособ. для бакалавров / под общ. ред. А.М. Кытманова. – М.: Юрайт,2015
6. Шипачев В.С. Курс высшей математики: учеб. для вузов / В.С. Шипачев, под ред. А.Н. Тихонова. – 4-е изд., испр. – М.: Оникс,2009