МИНИСТЕРСТВО ЦИФРОВОГО РАЗВИТИЯ, СВЯЗИ И МАССОВЫХ КОММУНИКАЦИЙ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Северо-Кавказский филиал ордена Трудового Красного Знамени
федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования
«Московский технический университет связи и информатики»

Ефимов С.В.

Методические указания
по дисциплине
«ОСНОВЫ ТЕОРИИ И МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ»

(направление подготовки 09.03.01
«Информатика и вычислительная техника»)

Ростов-на-Дону
2021

УДК 51.38
ББК 22.18
Е 91

Ефимов С.В. Методические указания по практическим занятиям по дисциплине «Основы теории и методы оптимизации». – Ростов н/Д: Полиграфический центр СКФ МТУСИ. – 2021. – 16 с.: ил.

Рассматриваются основные понятия и практические задачи по дисциплине. Представлен подробный анализ каждого практического занятия по дисциплине. Предназначено для направления подготовки 09.03.01 ИВТ 3 курса всех форм обучения.

Составитель: С.В. Ефимов, к.-ф.м.н., доцент

Рассмотрено и одобрено
на заседании кафедры

Протокол от 20.09.2021 г. № 2

Издательство СКФ МТУСИ

Сдано в набор 20.09.21. Изд. № 348. Подписано в печать 30.11.21. Зак. 362.
Печ. листов 1,0. Учетно-изд. л. 0,8. Печать оперативная. Тир. 5 экз.
Отпечатано в Полиграфическом центре СКФ МТУСИ, Серафимовича, 62.

ВВЕДЕНИЕ

Предлагаемые методические указания составлены в соответствии с рабочей программой дисциплины «Основы теории и методы оптимизации», изучаемой студентами 3 курса очной и заочной форм обучения СКФ МТУСИ. Данные методические указания посвящены решению задачи линейного программирования симплекс-методом. Изложен теоретический материал, подкрепленный подробным решением примеров. В конце методических указаний предлагаются задачи для самостоятельного решения.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ СИМПЛЕКС-МЕТОДОМ

Задачей линейного программирования (далее – ЗЛП) называется задача нахождения максимума или минимума линейной функции $f(\overline{x}) = \overline{c} \cdot \overline{x} + d$ с линейными ограничениями на вектор $\overline{x}$ в n-мерном арифметическом пространстве.

Здесь $\overline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $\overline{c} = (c_1, c_2, \dots, c_n)$, поэтому функцию $f(\overline{x})$ можно представить в виде $f(\overline{x}) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n + d$.

Функцию $f(\overline{x})$ принято называть функцией цели. В формулировках задач на максимум (или минимум) функции $f(\overline{x})$ обычно кратко записывают $f(\overline{x}) \longrightarrow max$ (или min).

Линейные ограничения на вектор $\overline{x}$ являются линейными уравнениями и неравенствами с неизвестными $x_1, x_2, \dots, x_n$. Эти ограничения определяют некоторый многогранник, называемый многогранником допустимых решений. В задачах экономического или физического содержания естественным ограничением может быть неотрицательность переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$ (кратко записывается $\overline{x} \geq \overline{0}$).

Точка многогранника допустимых решений, в которой функция цели $f(\overline{x})$ достигает свой максимум или минимум, называется оптимальным решением ЗЛП.

Решение ЗЛП основано на понятии опорного решения системы линейных уравнений и оформляется с помощью специальных симплексных таблиц.

Пусть система линейных уравнений (далее – СЛУ) представлена в виде $\overline{u} + A\overline{v} = \overline{b}$, где матрица A и вектор $\overline{b}$ известны. Вектор $\overline{u}$ и его координаты называются базисными, а вектор $\overline{v}$ и его координаты – свободными. Поэтому система линейных уравнений вида $\overline{u} + A\overline{v} = \overline{b}$ называется СЛУ с выделенным базисом. Информация об этой СЛУ записывается в следующую таблицу, называемую симплексной таблицей:

Своб. / Баз.	$\overline{v}$	1
$\overline{u}$	A	$\overline{b}$

Опорным решением системы линейных уравнений $\overline{u} + A\overline{v} = \overline{b}$ называется ее частное решение $\overline{u} = \overline{b}$, $\overline{v} = \overline{0}$. Если мы хотим найти другое опорное решение, то нужно перейти к равносильной СЛУ, обменяв одну координату вектора $\overline{u}$ на одну координату вектора $\overline{v}$. При этом изменятся матрица A и вектор $\overline{b}$. Такие изменения называются модифицированными жордановыми исключениями (далее – МЖИ) и оформляются в симплексных таблицах по следующим правилам:

1. Из элементов матрицы A выбрать генеральный элемент МЖИ a и по нему определить, какие именно координаты вектора $\overline{u}$ и вектора $\overline{v}$ поменяются местами в новой симплексной таблице (отмечены стрелками):

Своб. / Баз.	v_1	v_2	$\cdots$	$\uparrow$ v_j	$\cdots$	v_k	1
u_1	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
u_2	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\leftarrow$ u_i	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	a	$\cdots$	$\cdots$	$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
u_r	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$

Генеральный элемент МЖИ не равен нулю! Строка и столбец генерального элемента также называются генеральными.

2. В новой симплексной таблице поменять местами указанные u_i и v_j:

Своб. / Баз.	v_1	v_2	$\cdots$	u_i	$\cdots$	v_k	1
u_1							
u_2							
$\vdots$							
v_j							
$\vdots$							
u_r							

3. Новый базис умножить на генеральный элемент МЖИ:

Своб. / Баз.	v_1	v_2	$\cdots$	u_i	$\cdots$	v_k	1
$a \cdot u_1$							
$a \cdot u_2$							
$\vdots$							
$a \cdot v_j$							
$\vdots$							
$a \cdot u_r$							

4. В новой симплексной таблице на месте генерального элемента записать 1:

Своб. / Баз.	v_1	v_2	$\cdots$	u_i	$\cdots$	v_k	1
$a \cdot u_1$							
$a \cdot u_2$							
$\vdots$							
$a \cdot v_j$				1			
$\vdots$							
$a \cdot u_r$							

5. Остальные элементы генеральной строки оставить без изменения.

6. Остальные элементы генерального столбца умножить на -1.

7. Все остальные элементы таблицы пересчитать по правилу прямоугольников: если в исходной симплексной таблице имеется фрагмент

$$\begin{array}{ccc} \lambda & \cdots & p \\ \vdots & & \vdots \\ a & \cdots & \omega \end{array}$$

то в новой симплексной таблице на месте элемента p следует записать число $a \cdot p - \lambda \cdot \omega$. Формула $a \cdot p - \lambda \cdot \omega$ остается неизменной при любых перестановках строк или столбцов этого фрагмента.

Правила 4. – 7. можно объединить на одном рисунке:

$$\begin{array}{ccc} \lambda & \cdots & p \\ \vdots & & \vdots \\ a & \cdots & \omega \end{array} \overset{\text{МЖИ}}{\Longrightarrow} \begin{array}{ccc} -\lambda & \cdots & a \cdot p - \lambda \cdot \omega \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & \omega \end{array}$$

Пример 1. Пусть имеется СЛУ

$$\begin{cases} 3x_2 \quad + 4x_1 - 6x_3 + 5x_4 = 9 \\ \quad 4x_5 - 8x_1 + 2x_3 + 7x_4 = 4 \end{cases}.$$

Это СЛУ с выделенным базисом $\overline{u} = (3x_2,\ 4x_5)$, свободным вектором $\overline{v} = (x_1,\ x_3,\ x_4)$, матрицей $A = \begin{pmatrix} 4 & -6 & 5 \\ -8 & 2 & 7 \end{pmatrix}$ и вектором $\overline{b} = (9, 4)$. При этих условиях можно составить симплексную таблицу

Своб. / Баз.	x_1	x_3	x_4	1
$3x_2$	4	–6	5	9
$4x_5$	–8	2	7	4

и найти опорное решение СЛУ: базисные $3x_2 = 9$, $4x_5 = 4 \implies x_2 = 3$, $x_5 = 1$, свободные $x_1 = x_3 = x_4 = 0$. Таким образом, $\overline{x} = (0, 3, 0, 0, 1)$. Допустим, что мы хотим найти еще одно опорное решение СЛУ и в качестве генерального элемента МЖИ выбрали число 2:

	Своб. / Баз.	x_1	x_3 ↑	x_4	1
	$3x_2$	4	–6	5	9
←	$4x_5$	–8	2	7	4

Тогда по правилам 2. – 7. получается новая симплексная таблица

Своб. / Баз.	x_1	$4x_5$	x_4	1
$2 \cdot 3x_2$	–40	6	52	42
$2 \cdot x_3$	–8	1	7	4

и новое опорное решение СЛУ: базисные $6x_2 = 42$, $2x_3 = 4 \implies x_2 = 7$, $x_3 = 2$, свободные $x_1 = 0$, $4x_5 = 0 \implies x_5 = 0$, $x_4 = 0$. Таким образом, $\overline{x} = (0, 7, 2, 0, 0)$.

Если изначально базис не выделен, т.е. имеется произвольная СЛУ $A\overline{x} = \overline{b}$, то применяется метод ложного базиса: данную СЛУ записывают в виде $\overline{0} + A\overline{x} = \overline{b}$, где $\overline{u} = \overline{0}$ будет играть роль базисного вектора, а $\overline{v} = \overline{x}$ – свободного, и составляется симплексная таблица

Своб. / Баз.	$\overline{x}$	1
$\overline{0}$	A	$\overline{b}$

Из такой симплексной таблицы невозможно получить опорное решение, поэтому нулевой базис $\overline{0}$ называется ложным базисом. Однако после нескольких преобразований МЖИ все базисные нули перейдут в разряд свободных элементов, а их место займут координаты вектора $\overline{x}$, и мы получим симплексную таблицу, соответствующую СЛУ с выделенным базисом, а вместе с ней и первое опорное решение. При этом столбцы нулей, перешедших в разряд свободных элементов, из симплексной таблицы удаляются.

Практические замечания:

1) Числовой коэффициент свободного элемента может быть переведен в столбец этого элемента:

Своб. / Баз.	…	$\alpha \cdot x_j$	…	1
…	…	a	…	…
…	…	b	…	…
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
…	…	c	…	…

$\Longrightarrow$

Своб. / Баз.	…	x_j	…	1
…	…	$\alpha \cdot a$	…	…
…	…	$\alpha \cdot b$	…	…
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
…	…	$\alpha \cdot c$	…	…

2) Строку симплексной таблицы можно разделить на общий множитель элементов этой строки (если таковой множитель имеется и не равен нулю):

Своб. / Баз.	…	…	…	…	1
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
$\alpha \cdot x_i$	$\alpha \cdot a$	$\alpha \cdot b$	…	$\alpha \cdot c$	$\alpha \cdot d$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

$\Longrightarrow$

Своб. / Баз.	…	…	…	…	1
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
x_i	a	b	…	c	d
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

Пример 2. Найти опорные решения СЛУ

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - x_3 + 2x_4 = 1 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 - 2x_4 = 4 \end{cases}.$$

Здесь базис не выделен, поэтому применим метод ложного базиса:

$$\begin{cases} 0 \quad + 2x_1 + 5x_2 - x_3 + 2x_4 = 1 \\ \quad 0 + 3x_1 + 4x_2 + x_3 - 2x_4 = 4 \end{cases} \Longrightarrow$$

Своб. / Баз.	x_1	x_2	x_3	x_4	1
0	2	5	–1	2	1
0	3	4	1	–2	4

$\xRightarrow{\text{МЖИ}}$

Своб. / Баз.	x_1	x_2	0	x_4	1
0	5	9	1	0	5
x_3	3	4	1	–2	4

$\Longrightarrow$

Своб. / Баз.	x_1	x_2	x_4	1
0	5	9	0	5
x_3	3	4	–2	4

$\xRightarrow{\text{МЖИ}}$

Своб. / Баз.	0	x_2	x_4	1
$5x_1$	1	9	0	5
$5x_3$	–3	–7	–10	5

$\Longrightarrow$

Своб. / Баз.	x_2 ↑	x_4	1
← $5x_1$	9	0	5
$5x_3$	–7	–10	5

$\xrightarrow{\text{МЖИ}}$

Опорное решение $\overline{x} = (1, 0, 1, 0)$

Своб. / Баз.	$5x_1$	x_4	1
$9x_2$	1	0	5
$45x_3$	7	–90	80

$\Longrightarrow$

Своб. / Баз.	x_1	x_4	1
$9x_2$	$5 \cdot 1$	0	5
$45x_3$	$5 \cdot 7$	–90	80

$\Longrightarrow$

Своб. / Баз.	x_1	x_4	1
$9x_2$	5	0	5
$9x_3$	7	–18	16

Опорное решение $\overline{x} = (0, \frac{5}{9}, \frac{16}{9}, 0)$

Остальные опорные решения $\overline{x} = (\frac{16}{7}, -\frac{5}{7}, 0, 0)$, $\overline{x} = (1, 0, 0, -\frac{1}{2})$ и $\overline{x} = (0, \frac{5}{9}, 0, -\frac{8}{9})$ предлагаем найти самостоятельно.

Если нужно найти неотрицательные опорные решения ($\overline{x} \geq \overline{0}$), то в каждой симплексной таблице числовые коэффициенты неизвестных x_i должны быть только положительными, а числа в последнем столбце – только неотрицательными ($\overline{b} \geq \overline{0}$). Для того, чтобы не утратить эти свойства при переходе по МЖИ к очередной симплексной таблице, нужно придерживаться следующих правил:

1) генеральный элемент МЖИ может быть только положительным,

2) симплексное отношение генерального элемента МЖИ должно быть наименьшим по его столбцу (принцип минимального симплексного отношения). Здесь надо пояснить: пусть a – положительный элемент матрицы A, а b – последнее число в строке элемента a:

Своб. / Баз.	$\cdots$	v_j	$\cdots$	1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
u_i	$\cdots$	a	$\cdots$	b
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Тогда симплексным отношением элемента a называется число $\frac{b}{a}$. Для неположительных элементов матрицы A симплексные отношения не определяются.

Пример 3. Пусть мы ищем неотрицательные опорные решения СЛУ и уже имеется симплексная таблица:

Своб. / Баз.	v_1	v_2	v_3	1
u_1	–2	3	–10	6
u_2	0	–8	21	0
u_3	–1	5	0	7
u_4	–4	2	–1	9

Проанализируем возможность выбора генерального элемента МЖИ по каждому столбцу матрицы A:

1) в столбце v_1 нет положительных чисел, поэтому в данном столбце нельзя выбрать генеральный элемент МЖИ;

2) в столбце v_2 есть три положительных числа 3, 5 и 2; их симплексные отношения $\frac{6}{3} = 2$, $\frac{7}{5} = 1{,}4$ и $\frac{9}{2} = 4{,}5$ соответственно; наименьшим является $\frac{7}{5}$, поэтому число 5 из столбца v_2 можно выбрать генеральным элементом МЖИ;

3) в столбце v_3 имеется только одно положительное число 21; его можно выбрать генеральным элементом МЖИ.

Таким образом, существует только два способа выбрать генеральный элемент МЖИ в данной симплексной таблице:

Баз. \ Своб.	v_1	v_2	v_3	1
u_1	–2	3	–10	6
u_2	0	–8	21	0
u_3	–1	5	0	7
u_4	–4	2	–1	9

Решение канонической ЗЛП симплекс-методом.

Канонической задачей линейного программирования называется задача линейного программирования с ограничениями-равенствами и условием неотрицательности неизвестных:

$$f(\overline{x}) = \overline{c} \cdot \overline{x} + d \ \longrightarrow max \text{ (или } min\text{) при } A\overline{x} = \overline{b}, \overline{x} \geq \overline{0}.$$

Напомним, что оптимальным решением ЗЛП называется точка максимума (или точка минимума соответственно) функции цели $f(\overline{x})$ на многограннике допустимых решений (в данном случае это многогранник $A\overline{x} = \overline{b}, \overline{x} \geq \overline{0}$).

Идея решения канонической ЗЛП содержится в следующей теореме:

Теорема. Если каноническая ЗЛП имеет оптимальное решение, то его можно найти среди неотрицательных опорных решений СЛУ $A\overline{x} = \overline{b}$.

Существует специальный симплекс-метод, который позволяет вести направленный перебор неотрицательных опорных решений СЛУ $A\overline{x} = \overline{b}$ с постоянным улучшением функции цели $f(\overline{x})$ (с увеличением $f(\overline{x})$ в задачах на максимум и с уменьшением $f(\overline{x})$ в задачах на минимум), что значительно сокращает решение задачи.

Для того, чтобы решить каноническую ЗЛП симплекс-методом, нужно переписать СЛУ $A\overline{x} = \overline{b}$ в виде СЛУ с ложным базисом $\overline{0} + A\overline{x} = \overline{b}$, переписать функцию цели $f(\overline{x}) = \overline{c} \cdot \overline{x} + d$ в виде еще одного линейного уравнения $f - \overline{c} \cdot \overline{x} = d$, расценивая f как базисную переменную, и составить симплексную таблицу:

Баз. \ Своб.	$\overline{x}$	1
$\overline{0}$	A	$\overline{b}$
f	$-\overline{c}$	d

Нижняя строка таблицы называется f-строкой, а вектор $-\overline{c}$ называется строкой оценок. Именно знаки чисел строки оценок будут в дальнейшем указывать выбор генерального элемента МЖИ и сигнализировать об окончании решения задачи.

Следует неукоснительно соблюдать следующие требования:

1) генеральный элемент МЖИ можно выбирать только из элементов матрицы A,

2) при переходе к очередной симплексной таблице элементы f-строки преобразуются по тем же правилам МЖИ, что и другие строки таблицы,

3) поскольку задача решается с дополнительным условием неотрицательности $\overline{x} \geq \overline{0}$, то во всех симплексных таблицах должно выполняться условие $\overline{b} \geq \overline{0}$, поэтому генеральный элемент МЖИ следует выбирать из положительных элементов матрицы A по принципу минимального симплексного отношения, изложенного выше (элементы f-строки в симплексных отношениях не участвуют).

Решая задачу, мы должны, в первую очередь, с помощью МЖИ вывести все нули из базиса. Тогда мы получаем начальное неотрицательное опорное решение СЛУ $A\overline{x} = \overline{b}$ и значение функции цели $f(\overline{x})$ в этой точке. С этого момента вступают в силу правила, запускающие направленный перебор неотрицательных опорных решений СЛУ $A\overline{x} = \overline{b}$:

1) если выбрать генеральный элемент МЖИ в столбце над отрицательным числом строки оценок, то значение функции цели $f(\overline{x})$ увеличится; когда в строке оценок не останется отрицательных чисел, задача на максимум будет решена,

2) если выбрать генеральный элемент МЖИ в столбце над положительным числом строки оценок, то значение функции цели $f(\overline{x})$ уменьшится; когда в строке оценок не останется положительных чисел, задача на минимум будет решена.

Продемонстрируем решение канонической ЗЛП симплекс-методом на примерах.

Пример 4. Решить симплекс-методом ЗЛП

$$f(\overline{x}) = 3x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 - 1 \longrightarrow \max \text{ при } \begin{cases} x_1 - 3x_2 + 4x_3 - x_4 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5 \\ x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 4 \end{cases}, \overline{x} \geq \overline{0}.$$

Введем ложный базис из нулей и перепишем функцию цели $f(\overline{x})$ в виде еще одного линейного уравнения $f - 3x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = -1$:

$$\begin{cases} 0 + x_1 - 3x_2 + 4x_3 - x_4 = 1 \\ 0 + 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5 \\ 0 + x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 4 \\ f - 3x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = -1 \end{cases} \Longrightarrow$$

Своб. / Баз.	x_1	x_2	x_3	x_4	1
0	1	–3	4	–1	1
0	2	1	1	1	5
0	1	4	–3	2	4
f	–3	1	–1	–2	–1

В столбце переменной x_1 есть три положительных числа. Их симплексные отношения $\frac{1}{1}$, $\frac{5}{2}$ и $\frac{4}{1}$. Наименьшим является первое отношение. В соответствии с этим первое число указанного столбца можно выбрать генеральным элементом МЖИ:

	Своб. / Баз.	x_1 ↑	x_2	x_3	x_4	1
←	0	1	–3	4	–1	1
	0	2	1	1	1	5
	0	1	4	–3	2	4
	f	–3	1	–1	–2	–1

$\xrightarrow{\text{МЖИ}}$

Своб. / Баз.	0	x_2	x_3	x_4	1
x_1	1	–3	4	–1	1
0	–2	7	–7	3	3
0	–1	7	–7	3	3
f	3	–8	11	–5	2

$\Longrightarrow$

Баз. \ Своб.	x_2	x_3	x_4	1
x_1	–3	4	–1	1
0	7	–7	3	3
0	7	–7	3	3
f	–8	11	–5	2

Повторившуюся строку удаляем:

	Баз. \ Своб.	x_2	x_3	x_4 ↑	1
	x_1	–3	4	–1	1
←	0	7	–7	3	3
	f	–8	11	–5	2

МЖИ $\Longrightarrow$

Баз. \ Своб.	x_2	x_3	0	1
$3x_1$	–2	5	1	6
$3x_4$	7	–7	1	3
$3f$	11	–2	5	21

$\Longrightarrow$

Баз. \ Своб.	x_2	x_3	1
$3x_1$	–2	5	6
$3x_4$	7	–7	3
$3f$	11	–2	21

Поскольку нулей в базисе больше нет, то мы получаем начальное неотрицательное опорное решение $\overline{x} = (\frac{6}{3}, 0, 0, \frac{3}{3}) = (2, 0, 0, 1)$ и значение функции цели $f = \frac{21}{3} = 7$ в этой точке. В строке оценок есть отрицательное число –2, поэтому значение функции цели f можно увеличить, если выбрать генеральный элемент МЖИ в столбце над этим числом:

	Баз. \ Своб.	x_2	x_3 ↑	1
←	$3x_1$	–2	5	6
	$3x_4$	7	–7	3
	$3f$	11	–2	21

МЖИ $\Longrightarrow$

Баз. \ Своб.	x_2	$3x_1$	1
$5x_3$	–2	1	6
$15x_4$	21	7	57
$15f$	51	2	117

В строке оценок нет отрицательных чисел, поэтому дальнейшее увеличение значения функции цели f невозможно. Это означает, что задача на максимум решена. Ее оптимальное решение (точка максимума) $\overline{x} = (0, 0, \frac{6}{5}, \frac{57}{15}) = (0, 0, \frac{6}{5}, \frac{19}{5})$, а максимальное значение функции цели $f_{max} = \frac{117}{15} = \frac{39}{5}$.

Пример 5. Решить симплекс-методом ЗЛП

$$f(\overline{x}) = x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_4 \longrightarrow \min \text{ при } \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + 5x_4 = 9 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 \ \ + x_4 = 4 \end{cases}, \overline{x} \geq \overline{0}.$$

Введем ложный базис из нулей и перепишем функцию цели $f(\overline{x})$ в виде еще одного линейного уравнения $f - x_1 - 4x_2 - 2x_3 - x_4 = 0$:

$$\begin{cases} 0 \quad + x_1 + 2x_2 + x_3 + 5x_4 = 9 \\ 0 \quad + x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 4 \\ f - x_1 - 4x_2 - 2x_3 - x_4 = 0 \end{cases} \Longrightarrow$$

Баз. \ Своб.	x_1 ↑	x_2	x_3	x_4	1
0	1	2	1	5	9
← 0	1	3	–1	1	4
f	–1	–4	–2	–1	0

МЖИ $\Longrightarrow$

Баз. \ Своб.	0	x_2	x_3	x_4	1
0	–1	–1	2	4	5
x_1	1	3	–1	1	4
f	1	–1	–3	0	4

$\Longrightarrow$

Баз. \ Своб.	x_2	x_3	x_4 ↑	1
← 0	–1	2	4	5
x_1	3	–1	1	4
f	–1	–3	0	4

МЖИ $\Longrightarrow$

Баз. \ Своб.	x_2	x_3	0	1
$4x_4$	–1	2	1	5
$4x_1$	13	–6	–1	11
$4f$	–4	–12	0	16

$\Longrightarrow$

Баз. \ Своб.	x_2	x_3	1
$4x_4$	–1	2	5
$4x_1$	13	–6	11
$4f$	–4	–12	16

Поскольку нулей в базисе больше нет, то мы получаем начальное неотрицательное опорное решение $\overline{x} = (\frac{11}{4}, 0, 0, \frac{5}{4})$ и значение функции цели $f = \frac{16}{4} = 4$ в этой точке. При этом в строке оценок нет положительных чисел, поэтому дальнейшее уменьшение значения функции цели f невозможно. Это означает, что задача на минимум решена, т.е. найденное начальное неотрицательное опорное решение $\overline{x} = (\frac{11}{4}, 0, 0, \frac{5}{4})$ уже является оптимальным решением (точкой минимума) и $f_{min} = 4$.

Решение произвольных ЗЛП симплекс-методом.

Все ЗЛП с ограничениями-неравенствами сводятся к каноническим ЗЛП в пространстве большей размерности путем введения дополнительных переменных, позволяющих перейти к ограничениям-равенствам. Продемонстрируем метод дополнительных переменных на примерах.

Пример 6. Решить симплекс-методом ЗЛП

$$f(\overline{x}) = 2x_1 + 4x_2 + x_3 + 3 \longrightarrow \max \ \text{при} \ \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 \le 4 \\ -x_1 + 5x_2 - x_3 \ge 3 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 2 \end{cases}, \overline{x} \ge \overline{0}.$$

Данная задача сформулирована в 3-мерном пространстве и не является канонической ЗЛП, поскольку первые два ограничения – неравенства. Для того, чтобы эти ограничения стали равенствами, нужно в первом из них увеличить левую часть на некоторую неотрицательную величину x_4, а во втором – уменьшить левую часть на некоторую неотрицательную величину x_5. Тогда система ограничений примет вид

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 \qquad = 4 \\ -x_1 + 5x_2 - x_3 \qquad - x_5 = 3 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 \qquad\qquad = 2 \end{cases}.$$

Это ограничения канонической ЗЛП в 5-мерном пространстве. Неотрицательные величины x_4, x_5 и есть дополнительные переменные. Далее, как в примерах 4 и 5, вводим ложный базис из нулей и переписываем функцию цели $f(\overline{x})$ в виде еще одного линейного уравнения $f - 2x_1 - 4x_2 - x_3 = 3$:

$$\begin{cases} 0 \quad + x_1 + x_2 + 2x_3 \ + x_4 = 4 \\ 0 \quad -x_1 + 5x_2 - x_3 \quad - x_5 = 3 \\ 0 \quad + 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 2 \\ f - 2x_1 - 4x_2 \ - x_3 = 3 \end{cases} \Longrightarrow$$

Баз. \ Своб.	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	1
0	1	1	2	1	0	4
0	–1	5	–1	0	–1	3
0	3	1	–2	0	0	2
f	–2	–4	–1	0	0	3

В столбце переменной x_4 единственный положительный элемент 1. Его выберем генеральным элементом МЖИ:

Баз. \ Своб.	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	1
0	1	1	2	1	0	4
0	–1	5	–1	0	–1	3
0	3	1	–2	0	0	2
f	–2	–4	–1	0	0	3

МЖИ $\Longrightarrow$

Баз. \ Своб.	x_1	x_2	x_3	0	x_5	1
x_4	1	1	2	1	0	4
0	–1	5	–1	0	–1	3
0	3	1	–2	0	0	2
f	–2	–4	–1	0	0	3

$\Longrightarrow$

Баз. \ Своб.	x_1	x_2	x_3	x_5	1
x_4	1	1	2	0	4
0	–1	5	–1	–1	3
0	3	1	–2	0	2
f	–2	–4	–1	0	3

В столбце переменной x_1 есть два положительных числа 1 и 3. Их симплексные отношения $\frac{4}{1}$ и $\frac{2}{3}$. Наименьшим является второе отношение. В соответствии с этим число 3 указанного столбца можно выбрать генеральным элементом МЖИ:

Баз. \ Своб.	x_1	x_2	x_3	x_5	1
x_4	1	1	2	0	4
0	–1	5	–1	–1	3
0	3	1	–2	0	2
f	–2	–4	–1	0	3

МЖИ $\Longrightarrow$

Баз. \ Своб.	0	x_2	x_3	x_5	1
$3x_4$	–1	2	8	0	10
0	1	16	–5	–3	11
$3x_1$	1	1	–2	0	2
$3f$	2	–10	–7	0	13

$\Longrightarrow$

Баз. \ Своб.	x_2	x_3	x_5	1
$3x_4$	2	8	0	10
0	16	–5	–3	11
$3x_1$	1	–2	0	2
$3f$	–10	–7	0	13

В столбце переменной x_2 есть три положительных числа 2, 16 и 1. Их симплексные отношения $\frac{10}{2}$, $\frac{11}{16}$ и $\frac{2}{1}$. Наименьшим является второе отношение. В соответствии с этим второе число указанного столбца можно выбрать генеральным элементом МЖИ:

Своб. / Баз.	x_2	x_3	x_5	1
$3x_4$	2	8	0	10
0	16	–5	–3	11
$3x_1$	1	–2	0	2
$3f$	–10	–7	0	13

МЖИ $\Longrightarrow$

Своб. / Баз.	0	x_3	x_5	1
$48x_4$	–2	138	6	138
$16x_2$	1	–5	–3	11
$48x_1$	–1	–27	3	21
$48f$	10	–162	–30	318

$\Longrightarrow$

Своб. / Баз.	x_3	x_5	1
$48x_4$	138	6	138
$16x_2$	–5	–3	11
$48x_1$	–27	3	21
$48f$	–162	–30	318

$\Longrightarrow$

Своб. / Баз.	x_3	x_5	1
$8x_4$	23	1	23
$16x_2$	–5	–3	11
$16x_1$	–9	1	7
$8f$	–27	–5	53

Поскольку нулей в базисе больше нет, то мы получаем начальное неотрицательное опорное решение $x_1 = \frac{7}{16}$, $x_2 = \frac{11}{16}$, $x_3 = 0$, $x_4 = \frac{23}{8}$, $x_5 = 0$ и значение функции цели $f = \frac{53}{8}$ на нем. В строке оценок есть отрицательные числа –27 и –5, поэтому значение функции цели f можно увеличить, если выбрать генеральный элемент МЖИ в столбце над одним из этих чисел:

Своб. / Баз.	x_3	x_5	1
$8x_4$	23	1	23
$16x_2$	–5	–3	11
$16x_1$	–9	1	7
$8f$	–27	–5	53

МЖИ $\Longrightarrow$

Своб. / Баз.	x_3	$16x_1$	1
$8x_4$	32	–1	16
$16x_2$	–32	3	32
x_5	–9	1	7
$8f$	–72	5	88

$\Longrightarrow$

Своб. / Баз.	x_3	x_1	1
$8x_4$	32	–16	16
$16x_2$	–32	48	32
x_5	–9	16	7
$8f$	–72	80	88

$\Longrightarrow$

Своб. / Баз.	x_3	x_1	1
x_4	4	–2	2
x_2	–2	3	2
x_5	–9	16	7
f	–9	10	11

Мы получаем очередное неотрицательное опорное решение $x_1 = 0$, $x_2 = 2$, $x_3 = 0$, $x_4 = 2$, $x_5 = 7$ и значение функции цели $f = 11$ на нем. В строке оценок есть отрицательное число –9, поэтому значение функции цели f можно еще увеличить, если выбрать генеральный элемент МЖИ в столбце над этим числом:

Баз. \ Своб.	x_3 ↑	x_1	1
← x_4	4	–2	2
x_2	–2	3	2
x_5	–9	16	7
f	–9	10	11

МЖИ $\Longrightarrow$

Баз. \ Своб.	x_4	x_1	1
$4x_3$	1	–2	2
$4x_2$	2	8	12
$4x_5$	9	46	46
$4f$	9	22	62

В строке оценок нет отрицательных чисел, поэтому дальнейшее увеличение значения функции цели f невозможно, т.е. каноническая задача на максимум в 5-мерном пространстве решена. Ее оптимальное решение (точка максимума) $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{12}{4} = 3$, $x_3 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$, $x_4 = 0$, $x_5 = \frac{46}{4} = \frac{23}{2}$, а максимальное значение функции цели $f_{max} = \frac{62}{4} = 15\frac{1}{2}$. Если исключить дополнительные переменные x_4 и x_5, то мы получаем решение исходной задачи на максимум в 3-мерном пространстве:

оптимальное решение (точка максимума) $x_1 = 0$, $x_2 = 3$, $x_3 = \frac{1}{2}$,

максимальное значение функции цели $f_{max} = 15\frac{1}{2}$.

Пример 7. Решить симплекс-методом ЗЛП

$$f(\overline{x}) = 3x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 \longrightarrow \min \text{ при } \begin{cases} x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_4 \geq 5 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 4 \end{cases}, \overline{x} \geq \overline{0}.$$

Данная задача сформулирована в 4-мерном пространстве и не является канонической ЗЛП, поскольку первое ограничение – неравенство. Для того, чтобы это ограничение стало равенством, нужно уменьшить его левую часть на некоторую неотрицательную величину x_5, которая будет играть роль дополнительной переменной. Тогда система ограничений примет вид

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_4 - x_5 = 5 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 4 \end{cases}.$$

Это ограничения канонической ЗЛП в 5-мерном пространстве. Далее, как в примерах 4 и 5, вводим ложный базис из нулей и переписываем функцию цели $f(\overline{x})$ в виде еще одного линейного уравнения $f - 3x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 = 0$:

$$\begin{cases} 0 + x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_4 - x_5 = 5 \\ 0 + 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 4 \\ f - 3x_1 - x_2 - 2x_3 - x_4 = 0 \end{cases} \Longrightarrow$$

Баз. \ Своб.	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	1
0	1	4	2	1	–1	5
0	2	–1	1	2	0	4
f	–3	–1	–2	–1	0	0

В столбце переменной x_2 единственный положительный элемент 4. Его выберем генеральным элементом МЖИ:

Баз. \ Своб.	x_1	x_2 ↑	x_3	x_4	x_5	1
← 0	1	4	2	1	–1	5
0	2	–1	1	2	0	4
f	–3	–1	–2	–1	0	0

МЖИ $\Longrightarrow$

Баз. \ Своб.	x_1	0	x_3	x_4	x_5	1
$4x_2$	1	1	2	1	–1	5
0	9	1	6	9	–1	21
$4f$	–11	1	–6	–3	–1	5

$\Longrightarrow$

Своб. / Баз.	x_1	x_3	x_4	x_5	1
$4x_2$	1	2	1	–1	5
0	9	6	9	–1	21
$4f$	–11	–6	–3	–1	5

В столбце переменной x_1 есть два положительных числа 1 и 9. Их симплексные отношения $\frac{5}{1}$ и $\frac{21}{9}$. Наименьшим является второе отношение. В соответствии с этим число 9 указанного столбца можно выбрать генеральным элементом МЖИ:

Своб. / Баз.	x_1	x_3	x_4	x_5	1
$4x_2$	1	2	1	–1	5
0	9	6	9	–1	21
$4f$	–11	–6	–3	–1	5

МЖИ $\Longrightarrow$

Своб. / Баз.	0	x_3	x_4	x_5	1
$36x_2$	–1	12	0	–8	24
$9x_1$	1	6	9	–1	21
$36f$	11	12	72	–20	276

$\Longrightarrow$

Своб. / Баз.	x_3	x_4	x_5	1
$36x_2$	12	0	–8	24
$9x_1$	6	9	–1	21
$36f$	12	72	–20	276

$\Longrightarrow$

Своб. / Баз.	x_3	x_4	x_5	1
$9x_2$	3	0	–2	6
$9x_1$	6	9	–1	21
$9f$	3	18	–5	69

Поскольку нулей в базисе больше нет, то мы получаем начальное неотрицательное опорное решение $x_1 = \frac{21}{9} = \frac{7}{3}$, $x_2 = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$, $x_5 = 0$ и значение функции цели $f = \frac{69}{9} = 7\frac{2}{3}$ на нем. В строке оценок есть положительные числа 3 и 18, поэтому значение функции цели f можно уменьшить, если выбрать генеральный элемент МЖИ в столбце над одним из этих чисел:

Своб. / Баз.	x_3	x_4	x_5	1
$9x_2$	3	0	–2	6
$9x_1$	6	9	–1	21
$9f$	3	18	–5	69

МЖИ $\Longrightarrow$

Своб. / Баз.	x_3	$9x_1$	x_5	1
$81x_2$	27	0	–18	54
$9x_4$	6	1	–1	21
$81f$	–81	–18	–27	243

$\Longrightarrow$

Своб. / Баз.	x_3	$9x_1$	x_5	1
$9x_2$	3	0	–2	6
$9x_4$	6	1	–1	21
$9f$	–9	–2	–3	27

В строке оценок нет положительных чисел, поэтому дальнейшее уменьшение значения функции цели f невозможно, т.е. каноническая задача на минимум в 5-мерном пространстве решена. Ее оптимальное решение (точка минимума) $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$, $x_3 = 0$, $x_4 = \frac{21}{9} = \frac{7}{3}$, $x_5 = 0$, а минимальное значение функции цели $f_{min} = \frac{27}{9} = 3$. Если исключить дополнительную переменную x_5, то мы получаем решение исходной задачи на минимум в 4-мерном пространстве:

оптимальное решение (точка минимума) $x_1 = 0, x_2 = \frac{2}{3}, x_3 = 0, x_4 = \frac{7}{3}$, минимальное значение функции цели $f_{min} = 3$.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Решить задачу линейного программирования симплекс-методом.

1. $f(\overline{x}) = 2x_1 + x_2 + x_3 \to \max$ при $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \le 2 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 \ge 2 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$, $\overline{x} \ge \overline{0}$.

2. $f(\overline{x}) = x_1 + 2x_2 + x_3 \to \max$ при $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \le 2 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 \ge 2 \end{cases}$, $\overline{x} \ge \overline{0}$.

3. $f(\overline{x}) = 2x_1 + x_2 + 3 \to \min$ при $\begin{cases} x_1 + 3x_2 \ge 4 \\ 2x_1 + x_2 \ge 3 \end{cases}$, $\overline{x} \ge \overline{0}$.

4. $f(\overline{x}) = x_1 + 3x_2 - x_3 \to \max$ при $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 \le 6 \\ 2x_1 + x_3 = 3 \end{cases}$, $\overline{x} \ge \overline{0}$.

5. $f(\overline{x}) = 2x_1 + x_2 + x_3 \to \max$ при $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \le 2 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 \ge 2 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$, $\overline{x} \ge \overline{0}$.

6. $f(\overline{x}) = 2x_1 + 5x_2 \to \min$ при $\begin{cases} x_1 + 4x_2 \ge 6 \\ x_1 + 2x_2 \ge 4 \end{cases}$, $\overline{x} \ge \overline{0}$.

7. $f(\overline{x}) = 2x_1 + 3x_2 + x_3 \to \max$ при $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \le 2 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 \ge 2 \end{cases}$, $\overline{x} \ge \overline{0}$.

8. $f(\overline{x}) = 2x_1 + x_3 \to \max$ при $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \le 4 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 \ge 3 \end{cases}$, $\overline{x} \ge \overline{0}$.

9. $f(\overline{x}) = 3x_1 + 4x_2 - 1 \to \min$ при $\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 2 \\ 2x_1 + 3x_2 \ge 5 \end{cases}$, $\overline{x} \ge \overline{0}$.

10. $f(\overline{x}) = x_1 + x_2 + 2x_3 \to \max$ при $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 \le 3 \end{cases}$, $\overline{x} \ge \overline{0}$.